Lezione 20-09

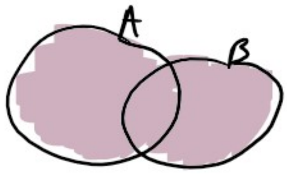
mercoledì 20 settembre 2023 11:09

OPERAZIONI TRA INSIEMI

(1) **UNIONE**

A, B insiemi

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B \}$$



$A = \{a, b, c, d\}$

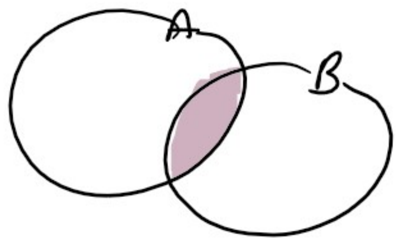
$B = \{c, d, e, f\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

(2) **INTERSEZIONE**

A, B insiemi

$$A \cap B = \{ x \mid \underline{x \in A} \text{ e } x \in B \}$$



Es - A, B come prima

$$A \cap B = \{c, d\}$$

OSS - $\cap$ e $\cup$ sono entrambe commutative : $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$

$\cap$ e $\cup$ sono associative : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$\underline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$$

Es - $A_n = [0, n] \subseteq \mathbb{R}$

$A_1 = [0, 1]$

$A_2 = [0, 2]$

$\vdots$

$A_4 = [0, 4]$

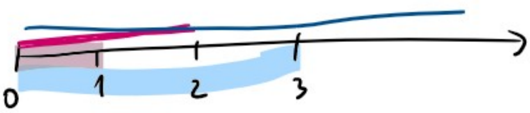
$A_2 = [0, 2]$

$A_4 = [0, 4]$

$\vdots$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} [0, n] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$ = reali positivi

$\bigcap_{i=1}^{\infty} [0, n] = [0, 1]$



OSS. • $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

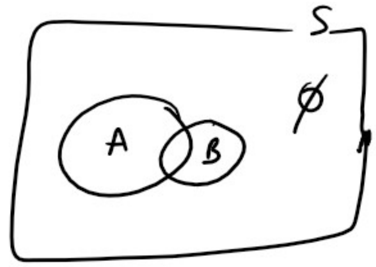
$A \cup B = B$

• $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$

ES. $\mathcal{P}(S)$, S insieme $S \neq \emptyset$

$\forall A, B \in \mathcal{P}(S) \quad A \cap B \in \mathcal{P}(S)$



$A \cap S = A$

$A \cup \emptyset = A$

ES. $m\mathbb{Z} = \{ ma \mid a \in \mathbb{Z} \}$ = multipli interi di m

$m\mathbb{N} = \{ ma \mid a \in \mathbb{N} \}$ = multipli positivi di m

$m\mathbb{N}_0 = \{ ma \mid a \in \mathbb{N}_0 \}$ = " " " $\cup \{0\}$

$3\mathbb{Z} = \{ 3a \mid a \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots -15, -9, -6, \dots 15, 3, \dots, 0, \dots \}$

$3\mathbb{N} = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18 \dots \}$

$3\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$

$3\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$

$6\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z}$ $\qquad \underbrace{6a}_{\in 6\mathbb{Z}} = 3 \cdot \underbrace{2 \cdot a}_{b} \Rightarrow \in 3\mathbb{Z}$

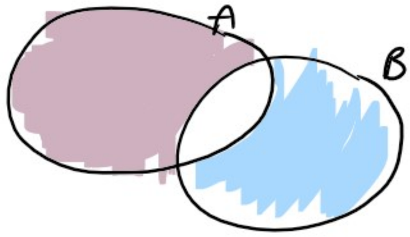
$3\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$

(3) DIFFERENZA TRA INSIEMI

A, B insiemi

$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$

$B \setminus A = \{ x \in B \mid x \notin A \}$



ES

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{a, b, f, g\}$

$A \setminus B = \{c, d\}$

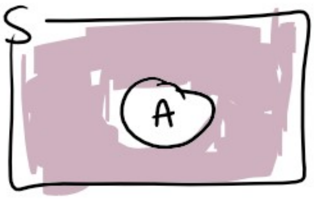
$B \setminus A = \{f, g\}$

ES - • $3\mathbb{Z} \setminus 6\mathbb{Z} = \{ x \in 3\mathbb{Z} \mid x$ non è pari$\}$

NB $2\mathbb{Z}$ = numeri pari $(2k)$ (NB - i dispari sono $2k+1$)

• $6\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z} = \phi$

ES - $\mathcal{P}(S)$, $S \neq \phi$



$S \setminus A$ = complemento di A

$\bar{A}$

A^c

NOTAZIONE - $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad A \cap B = \phi$

$B = \{4, 5\}$

Due insiemi con intersezione vuota li chiamiamo DISGIUNTI

$\boxed{\text{LEMMA}}$

Per ogni A, B, C insiemi, $\underbrace{A \cap (B \cup C)}_{1} \overset{\subseteq}{=} \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C)}_{2}$

(proprietà distributiva)

DIM

$2 \subseteq 1$

$$x \in A \cap (B \cup C) \overset{?}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in A \cap (B \cup C) \overset{\text{def di } \cap}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ e } x \in B \cup C$$

$$\overset{\text{def } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in A \text{ e } (x \in B \text{ oppure } x \in C)$$

$$\Longleftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ oppure } (x \in A \text{ e } x \in C)$$

$$\overset{\text{def di } \cap}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap B \text{ oppure } x \in A \cap C$$

$$\overset{\text{def di } \cup}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$\square$

PER CASA – Dimostrare che $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

A, B insiemi

$$A \times B = \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{coppia ordinata}} \in A \times B \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

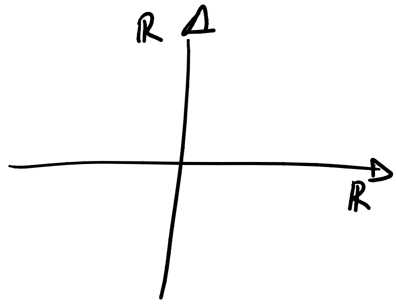
ES – $A = \{1, 2, 3\} \longleftarrow$

$B = \{a, b\} \longleftarrow$

$$A \times B = \{ (1,a), (2,b), (1,b), (2,a), (3,a), (3,b) \}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Es - $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



<u>OSS</u> - $A \times B \times C = \{ (a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C \}$

$A = \{ a, b \}$

$B = \{ 1, 2 \}$

$C = \{ \pi, \sqrt{2} \}$

$A \times B \times C = \{ (a, 1, \pi), (a, 1, \sqrt{2}), (a, 2, \pi), (a, 2, \sqrt{2}),$
$(b, 1, \pi), (b, 1, \sqrt{2}), (b, 2, \pi), (b, 2, \sqrt{2}) \}$

<u>OSS</u> - $A \times B \neq B \times A$

$A = \{ a, b \}$ $\quad A \times B = \{ (a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2) \}$

$B = \{ 1, 2 \}$ $\quad B \times A = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \}$

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ $\quad A \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \}$

$B = \{ 1, 2 \}$

<u>DEF</u> - Dati S e T insiemi chiamiamo RELAZIONE tra S e T un sottoinsieme del prodotto cartesiano $R \subseteq S \times T$

<u>ex</u> A e B di prima, $\quad R = \{ (1, 2), (2, 1) \}$

$R = A \times B$

$$R = \emptyset$$

OSS R non è sempre del tipo $A \times B$

ex $R = \{(1,2),(2,1)\}$ non è $A \times B$

se $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ $A \times B \neq R$

ES – $A = \{$abitanti di Salerno$\}$

$R \subseteq A \times A$

$R = \{(a,b) \in A \times A \mid a$ è sposato con $b\}$

$R = \{(a,b) \in A \times A \mid a$ è figlio di $b\}$

ES – $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$R_1 = \{(a,b) \mid a = b\} = \{(1,1), (2,2), (\sqrt{2},\sqrt{2}), \dots\}$

$R_2 = \{(a,b) \mid a \leq b\} = \{(1,2), (7,10), \dots\}$

$R_1 \subseteq R_2$

$\boxed{\text{Tipi di RELAZIONE}}$ A, B

1. $R = \emptyset$ Relazione vuota
2. $R = A \times B$ Relazione totale
3. Se $|A \times B| = s$ ho 2^s possibili relazioni $\left(|\mathcal{P}(A \times B)| \right)$
4. R è detta APPLICAZIONE (o funzione) se

$\forall a \in A \ \exists! \, b \in B$ t.c. $(a,b) \in R$ $(a R b)$

a è in Relazione con b

... (o funzione) se ... relazione con b

$\forall\, a \in A \quad \exists!\, b \in B \quad$ t.c. $\quad (a,b) \in R \qquad (aRb)$

esiste unico

⑤ R è detta RIFLESSIVA se $R \subseteq A \times A$ e

$\forall\, a \in A, \quad aRa \qquad ((a,a) \in R)$

$A = \{1, 2\}$

$R = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$

⑥ R è detta BINARIA se $A = B$ (se $R \subseteq A \times A$)

⑦ $R \subseteq A \times A$ è detta DIAGONALE se è la relazione

$\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$

⑧ R binaria è detta SIMMETRICA se $aRb \Rightarrow bRa$

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

⑨ R binaria è detta ASIMMETRICA se aRb e $bRa \Rightarrow a=b$

ex : $\leq$

⑩ R binaria è detta TRANSITIVA se aRb e $bRc \Rightarrow aRc$

ex. $\leq$

⑪ R binaria è detta RELAZIONE DI EQUIVALENZA se

è riflessiva, simmetrica e transitiva.

EX – maglietta dello stesso colore

⑫ R binaria è detta RELAZIONE D'ORDINE se è

riflessiva, asimmetrica e transitiva.

Ex – $\leq$

$| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è asimmetrica $\rightarrow$ $2 \mid -2$ e $-2 \mid 2$ ma $2 \neq -2$