martedì 26 settembre 2023 11:09

DEF – S, T insiemi, $R \subseteq S \times T$ (RELAZIONE)

$|S| = n$
$|T| = m$ $\Rightarrow$ $|S \times T| = n \cdot m$ e si possono avere al più $2^{n \cdot m}$ relazioni

perché i sottoinsiemi di $S \times T$ sono $2^{|S \times T|}$.

Tipi di RELAZIONE $R \subseteq S \times T$

① se $R = \phi$, è detta RELAZIONE VUOTA

② $R = S \times T$ è detta RELAZIONE TOTALE

③ R è detta BINARIA se $S = T$ cioè se $R \subseteq S \times S$

esiste unico

④ R è detta APPLICAZIONE (o funzione) se $\forall a \in S \; \exists ! \, b \in T$ t.c. $(a, b) \in R$

⑤ R binaria è detta RIFLESSIVA se $\forall a \in S$ si ha $(a, a) \in R$
$R \subseteq S \times S$ (Es – $\leq$, $=$)

⑥ $R \subseteq S \times S$ binaria è detta SIMMETRICA se $\forall a \in S$ t.c. $(a, b) \in R$ allora $(b, a) \in R$

ES – Essere sposati : se a è sposato con b $\Rightarrow$ b è sposato con a

⑦ $R \subseteq S \times S$ binaria è detta ASIMMETRICA se $\forall a, b \in S$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ $\Rightarrow$ $a = b$

ES – Divide in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se $a | b$ e $b | a$ $\Rightarrow$ $a = b$

ES – $\subseteq$ in $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$
$(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$
se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora $A = B$

⑧ $R \subseteq S \times S$ binaria è detta TRANSITIVA se $\forall a, b, c \in S$
$(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ $\Rightarrow$ $(a, c) \in R$

Es- $\subseteq$ in $\mathcal{P}(X)$ $\rightarrow$ se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$|$ in $\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$ $\rightarrow$ $a|b$ e $b|c \Rightarrow a|c$

$\leq$ in $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(9) $\Delta \subseteq S \times S$ binaria è detta DIAGONALE

$$\Delta = \{(a,a) \in S \times S\}$$
$$= \{(a,b) \in S \times S \mid a = b\}$$

(10) R è detta RELAZIONE DI EQUIVALENZA se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Es- $=$

(11) R è detta RELAZIONE di ORDINE se è riflessiva, asimmetrica e transitiva-

Es- $\leq, \geq, |$ (in $\mathbb{N}$)

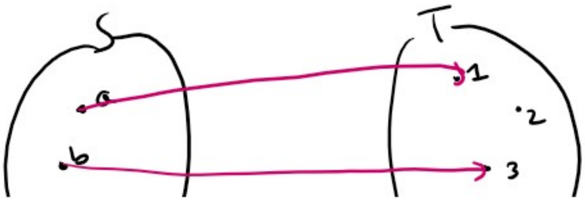
$\boxed{\text{APPLICAZIONI}}$

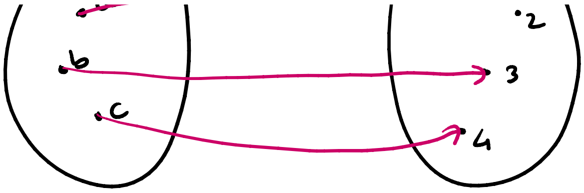
NOTAZIONE- $(a,b) \in R \iff a R b$ "a in Relazione R con b"

DEF - Una applicazione è una relazione $f \subseteq S \times T$ t.c. $\forall a \in S$ $\exists!$ $b \in T$ tc $(a,b) \in f$.

Poiché ogni "a" è associato da f ad un unico elemento "b" posso scrivere $f(a) = b$ invece che $(a,b) \in f$

Es- $S = \{a, b, c\}$ $T = \{1, 2, 3, 4\}$



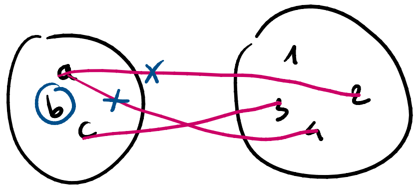


$$f = \{ (a,1), (b,3), (c,4) \}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(a)=1, \quad f(b)=3, \quad f(c)=4$$

<u>ES</u> - $S = \{a,b,c\}$, $T = \{1,2,3,4\}$

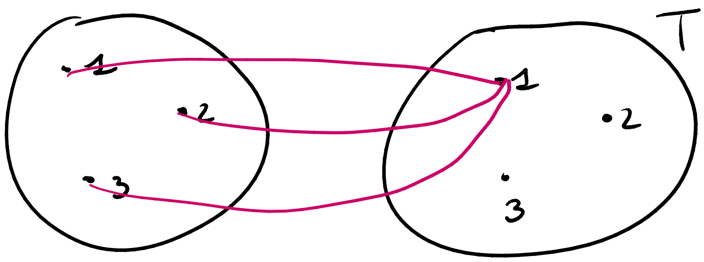
$f = \{ (a,2), (c,3), (a,4) \}$ è una relazione di $S \times T$ che <u>non è</u> applicazione (o funzione) perché

- a compare 2 volte nella prima componente
- b non compare nella prima componente



<u>ES</u> - $S = \{1,2,3\}$ $T = \{1,2,3\}$

$f = \{ (1,1), (2,1), (3,1) \}$ è applicazione



<u>ES</u> - $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x,y) \in f \iff x = y^2$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 4 = (-2)^2 \end{array}\right\} \quad (4,2) \in f$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 4 = (-2)^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (4, 2) \in f \\ (4, -2) \in f \end{array}$$

$-2 = ?$

ES - $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f(n) = 2 + n$ V

$f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$

$f(n) = n^2 + 1$ V

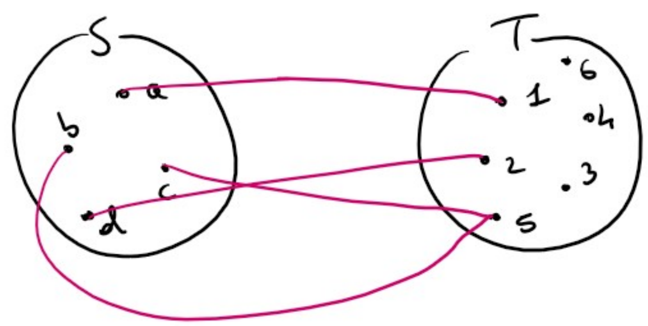
$f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$

$f(n) = n^2 - 1$ NO! $f(0) = \underline{-1} \notin \mathbb{N}_0$

$(0, \underline{?}) \in f$

DEF - Data $f \subseteq S \times T$ applicazione chiamiamo S DOMINIO di f e T CODOMINIO di f - Scriveremo anche $f: S \to T$ -

DEF - Data $f: S \to T$ applicazione, definiamo l'IMMAGINE di f come l'insieme $\mathrm{Im}(f) = f(S) = \{ f(s) \mid s \in S \} \subseteq T$



$\mathrm{Im}(f) = \{ f(a), f(b), f(c), f(d) \} = \{ 1, 5, 2 \} \subseteq T$

NOTAZIONE – $A \subseteq S$ $f(A) = \{ f(s) \mid s \in A \}$

ES – $A = \{a, b\}$ $f(A) = \{ f(a), f(b) \} = \{1, 5\}$

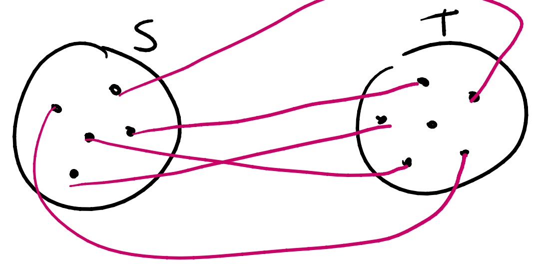
DEF – Sia $f: S \to T$ applicazione.
Dato $B \subseteq T$ chiamiamo PREIMMAGINE (o controimmagine) di B
l'insieme $f^{-1}[B] = \{ a \in S \mid f(a) \in B \} \subseteq S$

ES – $B = \{6, 3, 5\}$ $f^{-1}[B] = \{b, c\}$
$B = \{6, 3\}$ $f^{-1}[B] = \emptyset$
$f^{-1}(T) = S$

OSS – Si ha $f^{-1}[T] = S$ ma $f(S) \subseteq T$ (potrebbe essere un sottoinsieme proprio di T)

DEF – Una applicazione $f: S \to T$ si dice
① INIETTIVA se $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
(equivalentemente $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$)

ES –



ES – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$ $x, y \in \mathbb{R}$ & $\underset{f(x)}{2x} = \underset{f(y)}{2y} \Rightarrow \cancel{2}x = \cancel{2}y$
$\Rightarrow x = y$

$f(x) = x+1$
$a, b \in \mathbb{R}$ $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a + \cancel{1} = b + \cancel{1} \Leftrightarrow a = b$

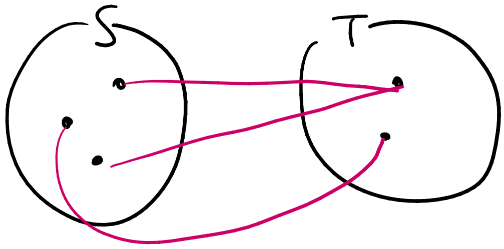
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

$f(x) = x^2$ non è iniettiva

$$a = -2, \quad b = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} f(-2) = (-2)^2 = 4 \\ f(2) = (2)^2 = 4 \end{array} \Rightarrow f(-2) = f(2) \text{ ma } -2 \neq 2$$

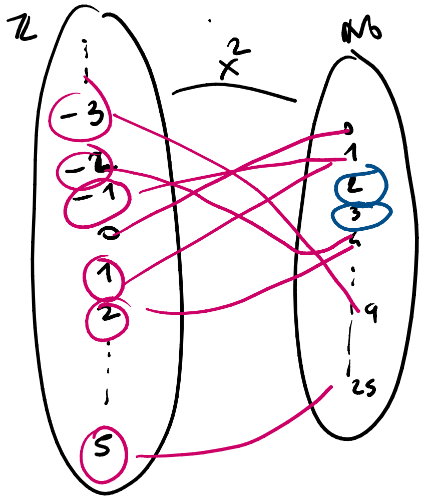
② $f: S \to T$ è detta SURIETTIVA se $Im(f) = T$

Es-



è suriettiva

Es- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = x^2$



3 non è un quadrato $\Rightarrow$ "non arrivano frecce"

DEF - Una funzione si dice BIETTIVA se è sia iniettiva che suriettiva.