28/09

f appl.

$f \subseteq S \times T$

$(\uparrow, \uparrow)$

S insieme

$R \subseteq S \times S$

R relazione di equivalenza

<u>DEF.</u>

R relazione binaria su S

R rel. di equivalenza $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

(1) R riflessiva

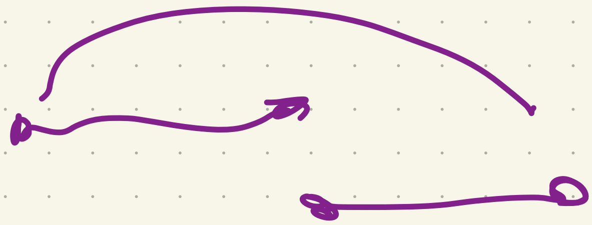
$\forall x \in S \quad xRx$

(2) R simmetrica

$xRy \Longrightarrow yRx \quad \forall x, y \in S$

(3) R transitiva

xRy e $yRz \Longrightarrow xRz$
$\forall x, y, z \in S$



Oss. $R \subseteq S \times S$

Es.

$S = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,a), (a,b), (b,a)\}$

R è di equiv.?

aRa, aRb, bRa

non è di eq. perché non è rifl.

$R = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$

$aRa \rightarrow aRa$

aRb

bRa

$bRb \rightarrow$ ✓

$cRc \rightarrow$ ✓

$aRb \overset{?}{\Longrightarrow} bRa$ → SI

R simmetrica ✓

R transitiva ?

- (a,a) (a,b) $\overset{?}{\Longrightarrow} aRb$
  $(a,b) \in R$

- $(a,b) \in R$
  - $(b,a) \in R \overset{?}{\Longrightarrow} (a,a) \in R$ ✓
  - $(b,b) \in R \overset{?}{\Longrightarrow} (a,b) \in R$ ✓

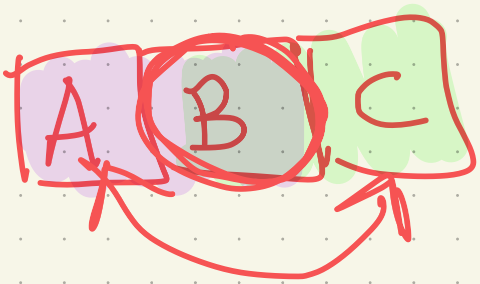
• $(b,a) \in R$ — $(a,a) \in R \overset{?}{\Rightarrow} (b,a) \in R$ ✓

— $(a,b) \in R \overset{?}{\Rightarrow} (b,b) \in R$ ✓

• $(b,b) \in R$ — $(b,a) \in R$

$\overset{?}{\Rightarrow} (b,a) \in R$ ✓

R transitiva ✓



Es. 2 $S = \mathbb{Z}$

$x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad xRy \overset{def}{\iff} x^2 = y^2$

(1) RIFL. $\forall x \in \mathbb{Z} \ \ xRx$

$x R x \iff x^2 = x^2$ ✓

(2) <u>SIM.</u>

$\underbrace{x R y}_{IP} \longrightarrow \underbrace{y R x}_{TH.}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$x^2 = y^2 \overset{?}{\Longrightarrow} y^2 = x^2$

(3) <u>TRANSIT.</u>

$\underbrace{x R y \ \& \ y R z}_{IP} \Longrightarrow \underbrace{x R z}_{TH}$

$x^2 = y^2$ & $y^2 = z^2 \overset{?}{\Longrightarrow} x^2 = z^2$

$x^2 = y^2 = z^2$ ✓

R rel. di eq.

ES. 3 $S = \mathbb{N}$

$x, y \in \mathbb{N}$

$x R y \overset{def}{\iff} x + y \in \mathbb{N}_d$

numeri naturali dispari

(1) RIFL.

$\forall x \in \mathbb{N} \quad x R x$

$\iff x + x \in \mathbb{N}_d$?

$2x \in \mathbb{N}_d$? No

$\Big(x R 1 \iff x + 1 \in \mathbb{N}_d$

$1 R 3$? $1 + 3 \in \mathbb{N}_d$ No $\Big)$

R non è di eq.

$S = \mathbb{N}$

$\forall x, y \in \mathbb{N}$

$xRy \overset{def}{\Longleftrightarrow} x+y \in \mathbb{N}_p$

(1) $\forall x \in \mathbb{N} \quad xRx$

$\Rightarrow x+x \in \mathbb{N}_p \Longleftrightarrow 2x \in \mathbb{N}_p$

vero

(2) SIMM.

$\underbrace{xRy}_{IP} \overset{?}{\Rightarrow} yRx$ TH.

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$x+y \in \mathbb{N}_p \Rightarrow y+x \in \mathbb{N}_p$ vero

(3) TRANSIT.

$$x R y \text{ e } y R z \overset{?}{\Longrightarrow} x R z$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y \in \mathbb{N}_p \\ y+z \in \mathbb{N}_p \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} x+z \in \mathbb{N}_p$$

$\Rightarrow$ • $x, y \in \mathbb{N}_p \rightarrow z \in \mathbb{N}_p \Rightarrow x+z \in \mathbb{N}_p$

• $x, y \in \mathbb{N}_d \rightarrow z \in \mathbb{N}_d \Rightarrow x+z \in \mathbb{N}_p$

Vero ✓

DEF. $S \neq \emptyset$ Rel. di eq.

$$[x]_R = \{ y \in S : y R x \}$$

↑ classe di equivalenza di x

$$S/R := \{ [x]_R : x \in S \}$$

↑ insieme quotiente

Es. 1 $\quad \mathbb{N}_0 \quad R$ di equiv.

$$x R y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x + y \in \mathbb{N}_p$$

$$[0]_R = \{ y \in \mathbb{N}_0 : y R 0 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{N}_0 : y + 0 \in \mathbb{N}_p \}$$

$$= \mathbb{N}_p$$

$$[1]_R = \{ y \in \mathbb{N}_0 : y R 1 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{N}_0 : y + 1 \in \mathbb{N}_p \} = \mathbb{N}_d$$

$$[3]_R \overset{\shortparallel}{=} [5]_R$$

↑ ↑

rappresentante

ES.2

S = classe 4

$x, y \in S$

$xRy \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ x e y tifano la stessa squadra

$[DAVIDE]_R = \{ y \in S :$ y, DAVIDE tifano la stessa squadra $\}$

$= \{ \quad \}$

$= \{$ non tifano nessuna squadra $\}$

$[\text{GIUSEPPE}]_R = \{ y \in S : y, \text{GIUSEPPE}$ tifano la stessa squadra $\}$

$= \{$ persone che tifano il napoli $\}$

⋮

PROPRIETÀ S insieme non vuoto, R rel. di equivalenza su S. Allora:

(1) $x \in [x]_R \quad \forall x \in R$

(2) $x R y \iff [x]_R = [y]_R$

(3) $x \not R y \iff [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

($x \not R y$: x e y non sono in relazione)

Dim.

(1) $x \in [x]_R \quad \forall x \in R \leftarrow ?$

$x \in [x]_R \iff x R x$ vero perché per ipotesi R è di eq.

$= \{y \in S : y R x\}$

(N.B. $\rightarrow [x]_R \neq \emptyset \quad \forall x \in S$)

(2) $A \iff B \rightarrow \begin{cases} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

" $\Rightarrow$ "

IP. $x R y$

TH. $[x]_R = [y]_R$ → Doppia inclusione

↳ TH: $[x]_R \subseteq [y]_R$ (I)

$[y]_R \subseteq [x]_R$ (II)

(I) $z \in [x]_R \overset{?}{\Longrightarrow} z \in [y]_R$

$z \in [x]_R \iff$ · $z R x$ e per ip.

· $x R y$

zRx e $xRy \Longrightarrow zRy$

↑ R transitiva

$\Longrightarrow z \in [y]_R$

(II) $[y]_R \subseteq [x]_R$

$z \in [y]_R \Longleftrightarrow zRy$ e xRy (IP. ⇓ SIM. → yRx)

$\Longrightarrow zRy$ e yRx

$\Longrightarrow zRx \Longrightarrow z \in [x]_R$ (Transit.)

"$\Longleftarrow$"

$\underbrace{[x]_R = [y]_R}_{IP} \Longrightarrow \underbrace{xRy}_{TH}$

$z \in [x]_R = [y]_R$

zRx e zRy

$\underset{\text{SIM.}}{\Longrightarrow} xRz$ e $zRy \underset{\text{TRANSIT.}}{\Longrightarrow} zRy$

(3) $x \not R y \iff [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

"$\Longleftarrow$"

$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset \Longrightarrow x \not R y$

contronominale $\left(\begin{array}{c} A \Longrightarrow B \\ \text{non} B \Longrightarrow \text{non} A \end{array} \right)$

$xRy \overset{?}{\Longrightarrow} [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

$x \in [y]_R$

nel punto 1 abbiamo visto che

$x \in [x]_R$

$x \in [y]_R$ e $x \in [x]_R$

$x \in [y]_R \cap [x]_R$

$\Rightarrow [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

"$\Longrightarrow$" ~~$x \not R y$~~ $\Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

per assurdo (Tesi falsa)
supponiamo che

$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

esiste $z \in [x]_R \cap [y]_R$

$\Longleftrightarrow z \in [x]_R$ e $z \in [y]_R$

$\Longleftrightarrow z R x$ e $z R y$

$\Downarrow$ simm.

$\Rightarrow x R z$ e $z R y$

$\Rightarrow$ Transit. $x R y$ ASSURDO!

OSS. S insieme non vuoto

R_1 rel. di eq. su S

R_2 rel. di eq. su S

Allora

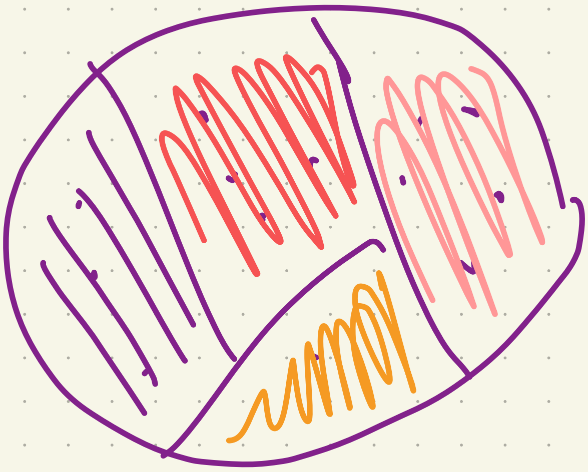
$$R_1 = R_2 \iff [x]_{R_1} = [x]_{R_2} \ \forall x \in S$$

$$\iff S/R_1 = S/R_2$$

DEF S insieme, $\mathcal{Y}$ famiglia di sottoinsiemi di S,

$\mathcal{Y}$ partizione di S $\overset{def}{\iff}$
$$\begin{cases} \forall X \in \mathcal{Y} \quad X \neq \emptyset \\ X, Y \in \mathcal{Y},\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset \\ \bigcup_{X \in \mathcal{Y}} X = S \end{cases}$$

S



<u>ES. 1</u> $S = \{a, b, c\}$

$\mathcal{Y}_1 = \{\underbrace{\{a\}}_{X_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{X_2}\}$

$\mathcal{Y}_2 = \{S\}$ → part. totale

$\mathcal{Y}_3 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\mathcal{Y}_4 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$

$\mathcal{Y}_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ → part. identica

<u>TEOREMA FOND. RELAZ. DI EQ.</u>

S insieme non vuoto

$\mathcal{R}$ rel. di eq. su S

Allora:

(1) $S/_{\mathcal{R}}$ è una partizione di S

$\shortparallel$

$\{[x]_{\mathcal{R}} : x \in S\}$

(2) $\mathcal{Y}$ partizione di S $\Longrightarrow$ esiste un'unica relazione di eq. individuata da $\mathcal{Y}$.

$S = \{a, b, c\}$

$\mathcal{Y}_1 = \{\{a\}, \{b, c\}\} = S/_{\mathcal{R}_{\mathcal{Y}_1}}$

(2) due elementi sono in rel.

$\Longleftrightarrow$ appartengono allo stesso insieme della partizione

$R_{y_1} = \{ (b,c), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c) \}$

R rel. disc. $\Longrightarrow$ Partiz.

Partiz. $\Longrightarrow$ R rel. disc.