Lezione 04-10

mercoledì 4 ottobre 2023 09:06

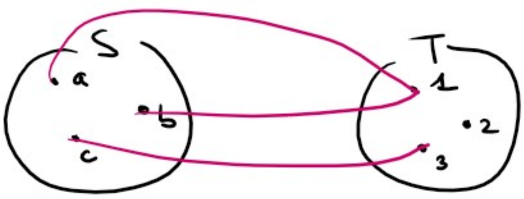
DEF - Data $f: S \to T$, chiamiamo **INVERSA** di f la funzione $f^{-1}: T \to S$ tale che

$$f^{-1} \circ f : S \to S \quad \text{soddisfa} \quad (f^{-1} \circ f)(s) = s \quad \forall s \in S$$

$$\text{e} \quad f \circ f^{-1} : T \to T \quad \text{soddisfa} \quad (f \circ f^{-1})(t) = t \quad \forall t \in T$$

OSS - f^{-1} è la **RELAZIONE OPPOSTA** di f, nel senso che se $(a,b) \in f$ allora $(b,a) \in f^{-1}$.

ESEMPIO: $f: S \to T$



$$f \subseteq S \times T \qquad f = \{\underbrace{(a,1)}_{f(a)=1}, \underbrace{(b,1)}_{f(b)=1}, \underbrace{(c,3)}_{f(c)=3}\}$$

$$f^{op} \subseteq T \times S \quad \text{relazione opposta} \quad f^{op} = \{(1,a), (1,b), (3,c)\}$$

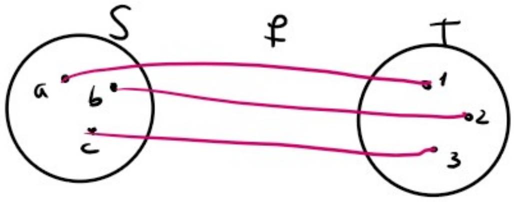
f^{op} non è funzione perché 1) l'elemento $1 \in T$ ha 2 "immagini"
2) l'elemento $2 \in T$ non ha nessuna immagine

(1) dipende dalla non-iniettività, (2) dipende dalla non suriettività.

TEOREMA (s d)

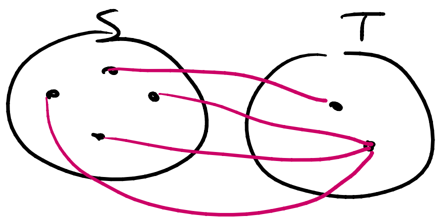
f ha una inversa $\Leftrightarrow$ f è biettiva

OSS - Se S e T sono insiemi finiti, f è biettiva $\Rightarrow |S| = |T|$



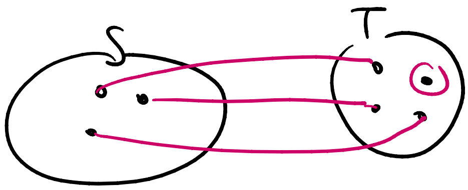
• se $|S| > |T|$

non ho funzioni iniettive



• se $|S| < |T|$

non ho funzioni suriettive



ESERCIZIO

$k: 5\mathbb{Z} \to 25\mathbb{Z}$, $\quad z \to z^2$

$h: 25\mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$, $\quad z \to \frac{z}{5}$

$k(z) = z^2$

$(5n)^2 = 25n^2$

$h(z) = \frac{z}{5}$

$\frac{25n}{5} = 5n$

$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

1) $k(\{-5, 0, 5, 10\}) = ?$

$k(\{-5, 0, 5, 10\}) = \{k(-5), k(0), k(5), k(10)\} = \{25, 0, 100\}$

2) $k(50\mathbb{Z}) = ?$

$x \in 50\mathbb{Z} \iff \exists z \in \mathbb{Z}$ t.c. $x = 50 \cdot z$

$\Rightarrow$ x^2 diventa $(50z)^2 = 2500 \cdot z^2$

$k(50\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2500z^2$ con $z \in \mathbb{Z}\}$

$= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z}$ t.c. $x = 2500z^2\}$

$10000 \in k(50\mathbb{Z})$ perché $10000 = 2500 \cdot (2^2)$

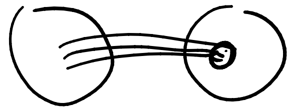
3) $k^{-1}(\{0, 25, -25, 50\})$

$f: S \to T$

$f^{-1}(A) = \{a \in S \mid f(a) \in A\}$

3) $k^{-1}(\{0, 25, -25, 50\})$

$f^{-1}(A) = \{a \in S \mid f(a) \in A\}$



$0 = 0^2 \Rightarrow 0 \in k^{-1}(\dots)$

$25 = 5^2 \Rightarrow 5 \in k^{-1}(\dots)$

-25 non è il quadrato di nulla!

$\Rightarrow$ " $k^{-1}(\{-25\}) = \emptyset$

50 non è il quadrato di nulla!

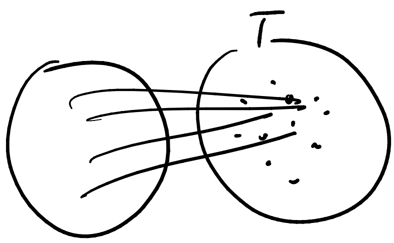
$\Rightarrow k^{-1}(\{0, 25, -25, 50\}) = \{0, 5\}$?

$\downarrow$

osservo che anche $(-5)^2 = 25$!

$\Rightarrow k^{-1}(\{0, 25, -25, 50\}) = \{0, -5, 5\}$

4) $h^{-1}(5\mathbb{Z}) = 25\mathbb{Z}$



$h^{-1}(h(25\mathbb{Z})) \neq 25\mathbb{Z}$

$h^{-1}(\underbrace{5\mathbb{Z}}_{\text{codominio}}) = 25\mathbb{Z}$

$x \in 25\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}$ t.c. $x = 25z$

$x \in 5\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z}$ tc $x = 5z$

$h(x) = \frac{25z}{5} = 5z$

5 $\rightarrow$ proviene da 25

10 $\rightarrow$ proviene da 50

$\forall x \in 5\mathbb{Z}, \quad x = h(5 \cdot x)$

5) $h(\{0, 25, -50\}) = \{h(0), h(25), h(-50)\} = \{0, 5, -10\}$

6) $h^{-1}(\{0, 25, 50\}) = \{0, 125, 250\}$

$0 = \frac{0}{5} \to \checkmark$

$25 = \frac{125}{5}$

$50 = \frac{250}{5}$

1) k è iniettiva ? è suriettiva ?

k non è iniettiva : $k(-5) = k(5) = 25$ ma $-5 \neq 5$

k non è suriettiva : ad esempio $-25 \in 25\mathbb{Z}$ non è un quadrato ! e la funzione restituisce il quadrato

non è biettiva $\Rightarrow$ non è invertibile

2) h è iniettiva ? è suriettiva ?

h è iniettiva se $\boxed{h(z_1) = h(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2}$

$$h(z_1) = h(z_2) \underset{\text{def di } h}{\Leftrightarrow} \frac{z_1}{5} = \frac{z_2}{5} \underset{\text{moltiplico per } 5}{\Leftrightarrow} z_1 = z_2$$

h è suriettiva ? $h(25\mathbb{Z}) = 5\mathbb{Z}$? def di suriettività

$\forall\, x \in 5\mathbb{Z} \;\; \exists\, a \in 25\mathbb{Z}$ t.c. $x = h(a)$

è vero ! dato x, $a = 5 \cdot x$

$h(5x) = x$

$\Rightarrow$ h è suriettiva e quindi biettiva !!

La sua inversa è $h^{-1} : 5\mathbb{Z} \to 25\mathbb{Z}$

La sua inversa è $h^{-1}: 5\mathbb{Z} \to 25\mathbb{Z}$
$x \mapsto 5x$

Esercizio

$A \dot{\cup} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $\qquad$ $A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \overset{\text{Def di } \cup}{\Longleftrightarrow} \underbrace{x \in A \setminus B}$ oppure $\underbrace{x \in B \setminus A}$

$\overset{\text{def di } \setminus}{\Longleftrightarrow} (x \in A$ e $x \notin B)$ oppure $(x \in B$ e $x \notin A)$

- Se $x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow \underline{x \in A \cup B}$ e poiché $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$

perché $A \subseteq A \cup B$ $\qquad$ perché per stare nella intersezione deve stare in entrambi

$\Rightarrow$ per def di $\setminus$, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Se $x \in B$ e $x \notin A$ il ragionamento è uguale! (*)

$\Rightarrow$ se $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Supponiamo ora che $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\overset{\text{def di } \setminus}{\Rightarrow} x \in (A \cup B)$ e $x \notin A \cap B$

$\overset{\text{def di } \cup}{\Rightarrow} (x \in A$ oppure $x \in B)$ e $x \notin A \cap B$

$\Rightarrow$ $x \in A$ e $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \setminus B$

se $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin B$

$x \in B$ e $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in B \setminus A$.

$\Rightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(*) $\underbrace{\underset{\Downarrow}{x \in B} \quad \underset{\Downarrow}{e \ \ x \notin A}}$

$\underbrace{x \in B \cup A \qquad x \notin B \cap A}$

def. di $\setminus$: $x \in (B \cup A) \setminus (B \cap A)$
$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- $A = \{1, 2\}$

$\mathcal{P}(A) = \{ \overset{a}{\{1\}}, \overset{b}{\{2\}}, \overset{c}{A}, \overset{d}{\phi_{1}} \}$ $\qquad 2^{|A|}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{ \phi_2, \{\phi_1\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{A\},$

$\{\{1\}, \{2\}\}, \{\phi_1, \{1\}\}, \{\phi_1, \{2\}\}, \{\phi_1, A\},$

$\{\{1\}, A\}, \{\{2\}, A\},$

$\{\{1\}, \{2\}, A\}, \{\{1\}, \{2\}, \phi\}, \{\phi, \{1\}, A\}$

$\{\phi, \{2\}, A\},$

$\mathcal{P}(A) \}$