ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
08/09/2021

APPELLO DI SETTEMBRE

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Il numero di alghe presenti in un certo ecosistema è data da

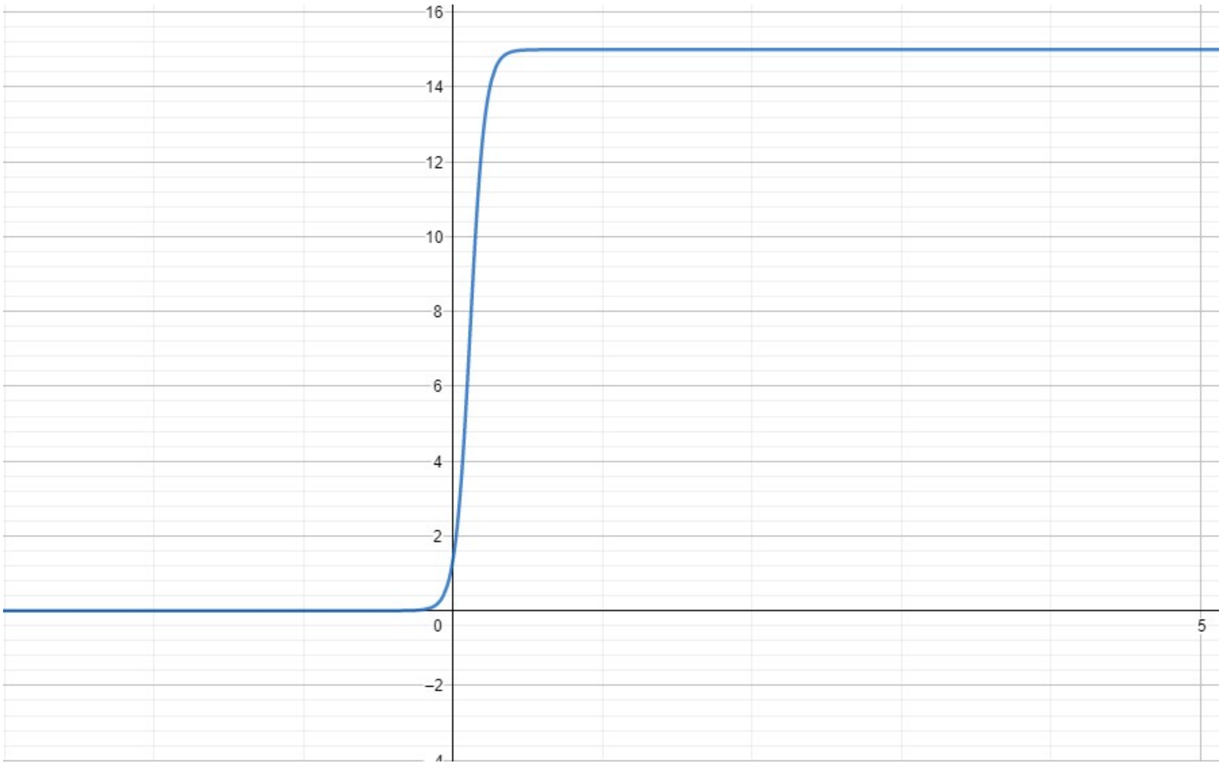
$$a(t) = \frac{15}{1 + 10e^{-20t}},$$

dove t misura l'età in anni e $a(t)$ il numero di alghe in unità di migliaia.

(1) Qual è la stima del numero di alghe tra 5 anni?
(2) Dopo quanto tempo si avranno 10000 di alghe?
(3) Disegnare approssimativamente la funzione $a(t)$.

Soluzione:

(1) $a(5) = 15$
(3) Si risolve l'equazione $a(t) = 10$, il cui risultato è circa 0,15 anni, cioè circa 1 mese e 24 giorni.



Esercizio 2 (7 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\log_2(x-2)\right) + e^{\frac{x}{x-3}},$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

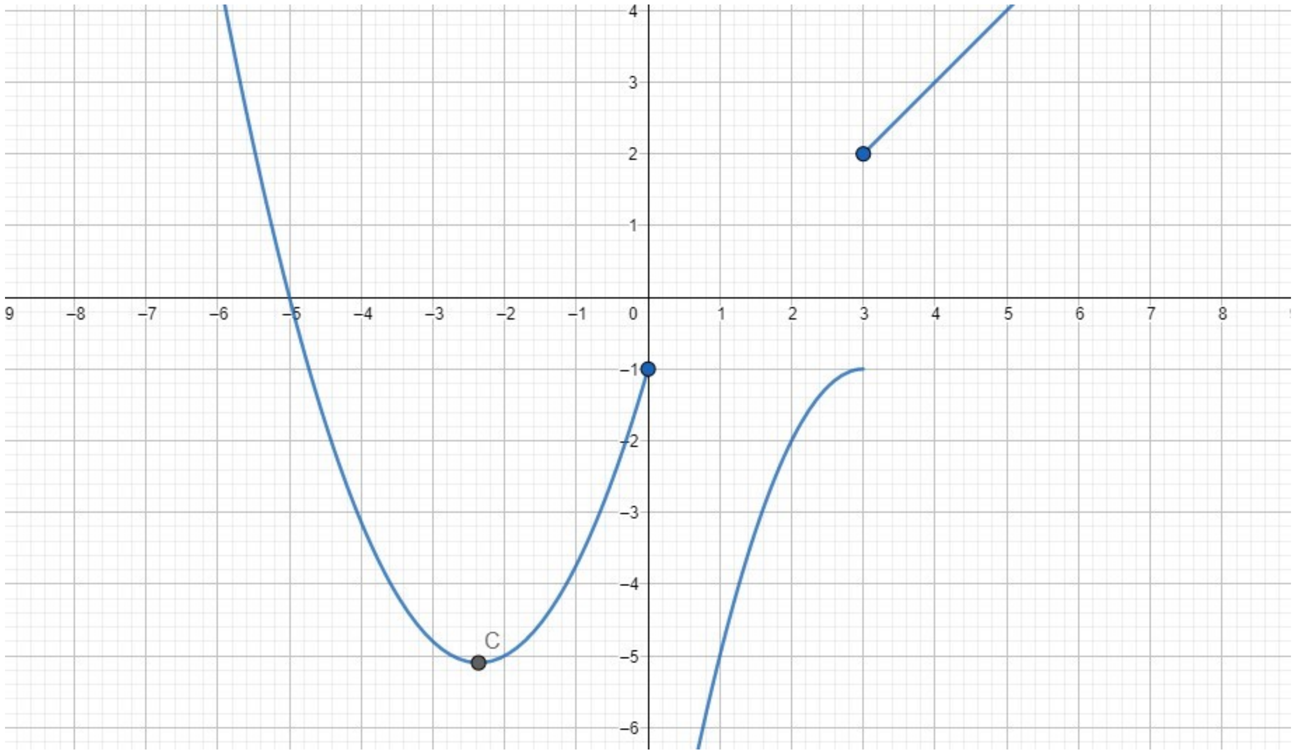
Soluzione:

(1) $Dom\,(f) = \left[\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3, 4]$.

(2)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\log_2(x-2))^2}} \cdot \frac{\log_2(e)}{x-2} - \frac{3}{(x-3)^2} e^{\frac{x}{x-3}}$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione:



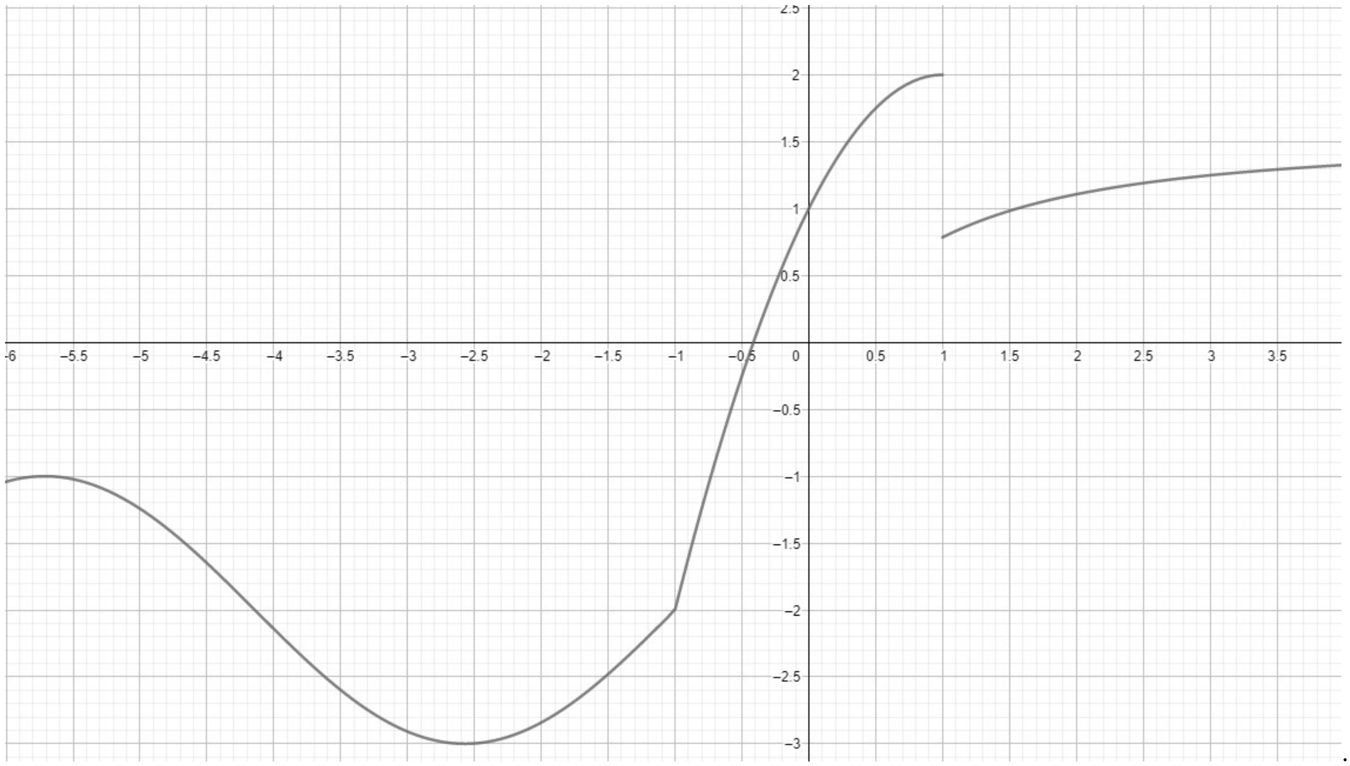
Rispondere alle seguenti domande **motivando ogni risposta**.

(1) Quanto vale la derivata di $f(x)$ se x è l'ascissa del punto C?
(2) Quanto vale $f(0)$?
(3) È vero che $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$?
(4) Quanto vale $\lim_{x\to +\infty} f(x)$?
(5) $f(x)$ è continua e derivabile in $x = 4$?

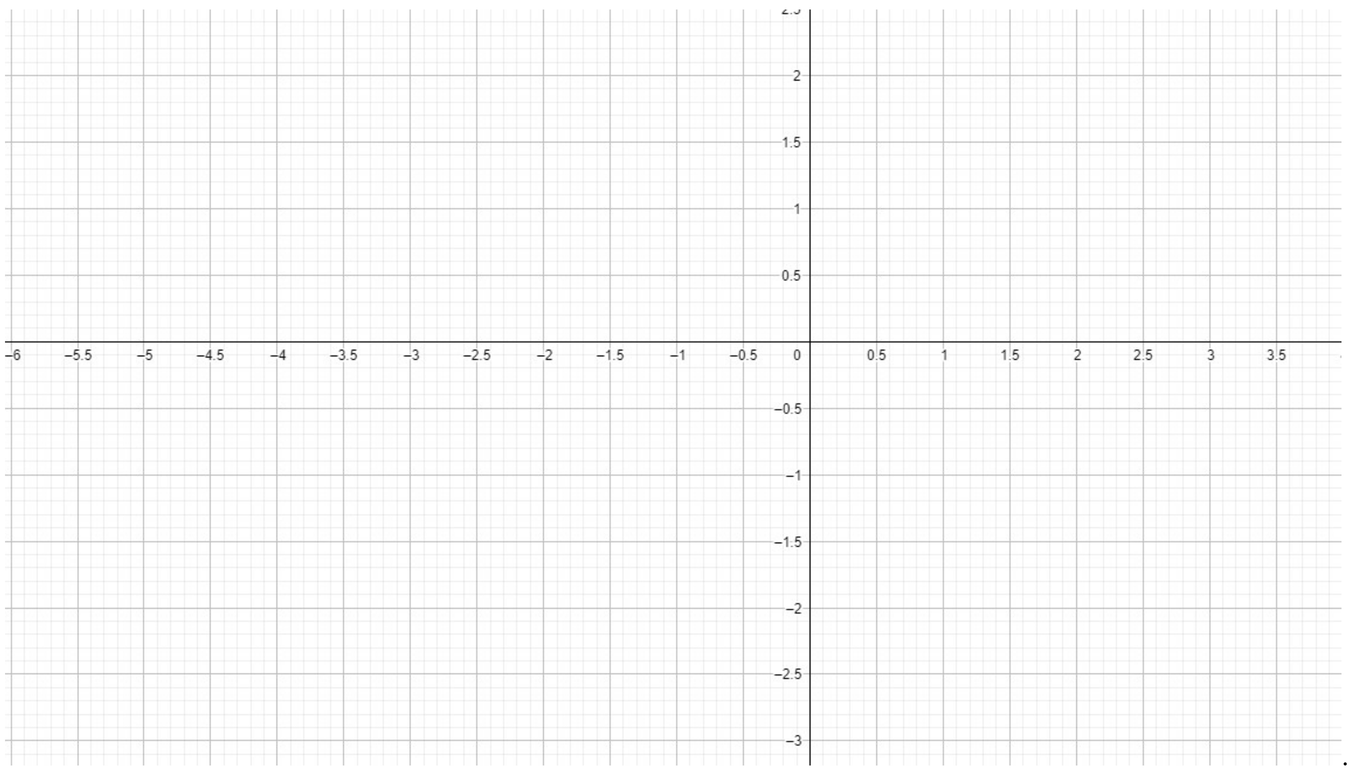
Soluzione:

(1) C è un punto di minimo relativo (la funzione è continua e derivabile). Quindi $f'(x_C) = 0$.
(2) $f(0) = -1$, usando la notazione fissata del 'pallino pieno'
(3) No, $\lim_{x\to 3} f(x)$ non esiste poichè limite destro e sinistro non coincidono.
(4) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, la funzione è strettamente crescente per $x > 3$.
(5) Per $x > 3$ la funzione è una retta strettamente crescente, quindi sarà continua e derivabile in $x = 4$

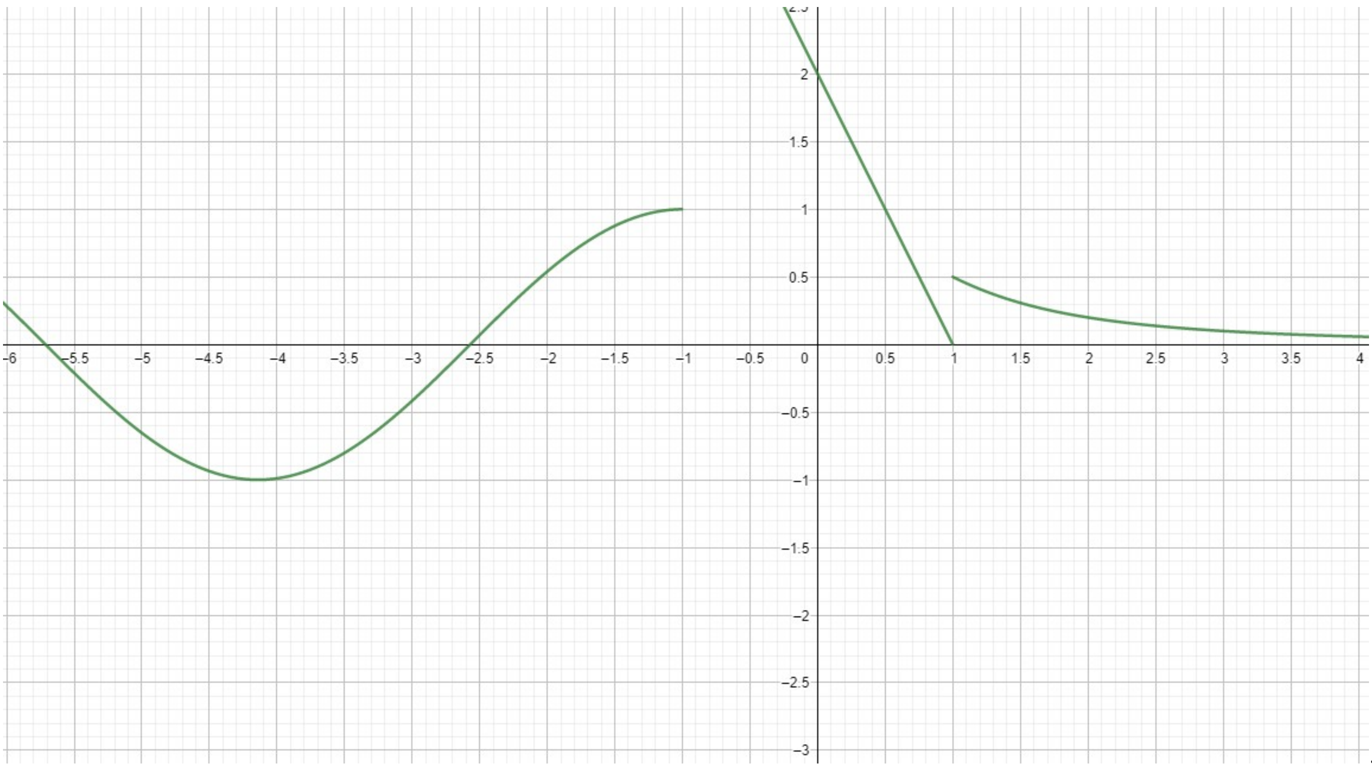
Esercizio 4 (5 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di funzione



Disegnarne approssimativamente la sua derivata.



Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Stabilire se è possibile scrivere il vettore $(1, 0, -3, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 0, -1, 2)$, $(2, 4, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0)$.

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, $C = AB$.

(3) Trovare il rango della matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

(1) Non è possibile: la matrice 4×4 costruita con i quattro vettori considerati ha determinante diverso da zero.

(2)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(3) Il determinante di C è non nullo, quindi il rango è 4.

Esercizio 6 (5 punti)**.** Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$, le cui radici sono $+1, -1, +2$. Quindi, la matrice è diagonalizzabile.