ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
08/11/2021

APPELLO STRAORDINARIO

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Data la seguente funzione:

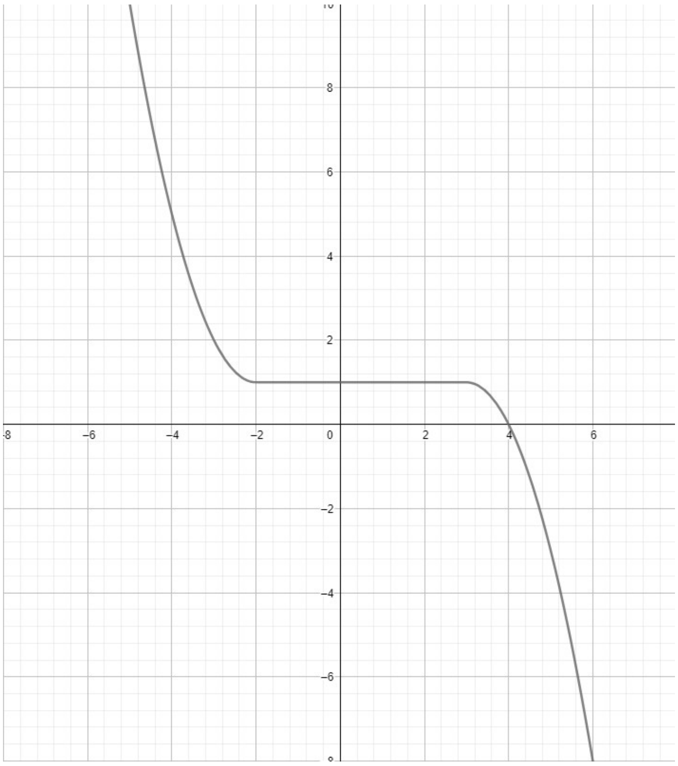
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & x \leq -2 \\ 1 & -2 < x < 3 \\ -x^2 + 6x - 8 & x \geq 3. \end{cases}$$

dopo averla disegnata, rispondere alle seguenti domande **motivando la risposta**.

(1) f è una funzione monotona? Se si, di che tipo? f è strettamente monotona?
(2) f è una funzione iniettiva?

Soluzione:

(1) f è decrescente, ma non strettamente. Tra -2 e 1 la funzione è costante. Prima e dopo, è fatta da tratti decrescenti di parabole, in quanto -2 e 3 sono le ascisse dei vertici.
(2) f non è iniettiva perché presenta un tratto costante. Ad esempio, si ha $f(-2) = f(3)$.



Esercizio 2 (7 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \log_4\left(3x - \sqrt{x^2-3}\right) + \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}},$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione:

(1) $Dom\,(f) = \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$.

(2)

$$f'(x) = \frac{\log_4(e)}{3x - \sqrt{x^2-3}} \cdot \left(3 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \cdot \frac{3}{(2x+1)^2}$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la funzione dell'esercizio 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & x \leq -2 \\ 1 & -2 < x < 3 \\ -x^2 + 6x - 8 & x \geq 3. \end{cases}$$

Stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = -2$.

Soluzione:

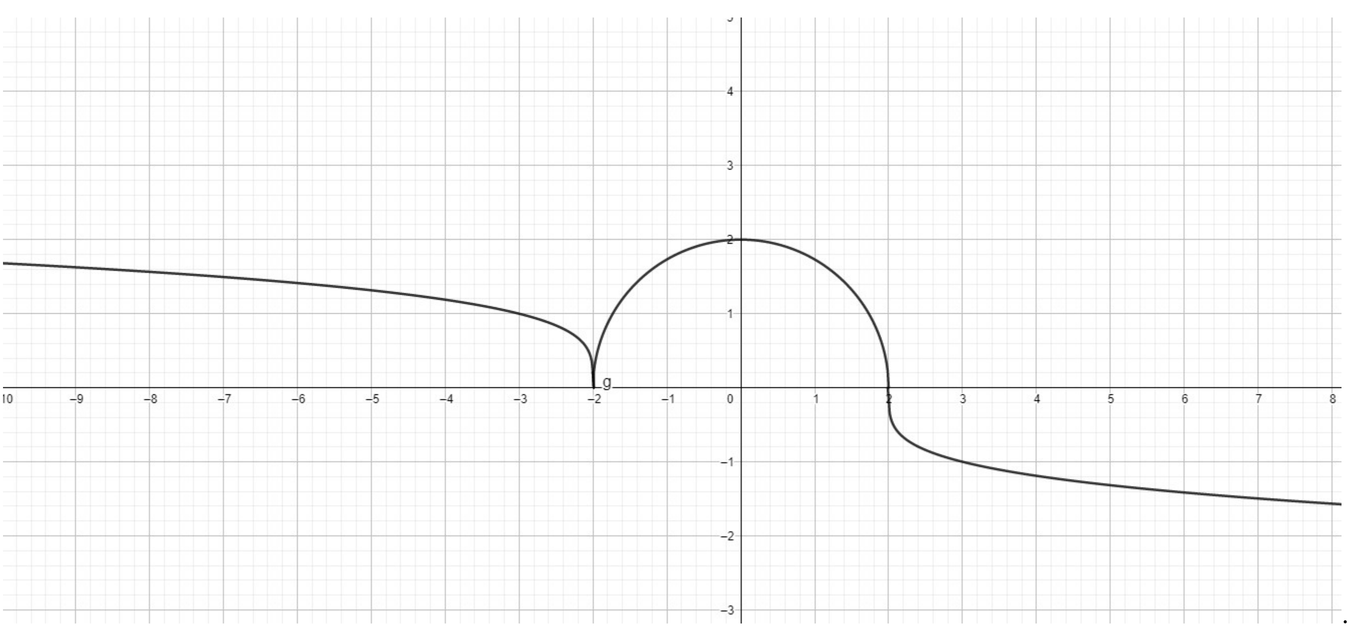
(1) Per la continuità, notiamo che $f(-2) = 1$ e che $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} x^2 + 4x + 5 = 1$ e $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} 1 = 1$.

(2) Si ha che

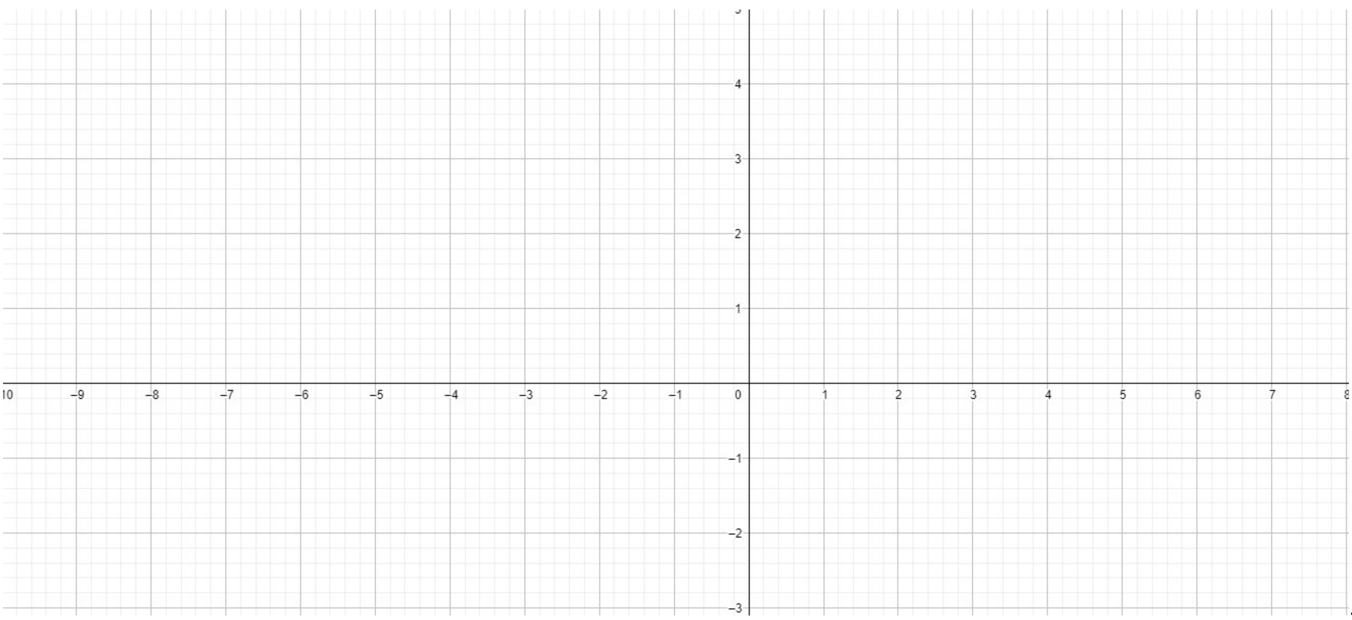
$$\lim_{x\to-2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2^-} x + 2 = 0 \quad \text{e} \lim_{x\to-2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} 0 = 0.$$

Quindi f è derivabile in -2.

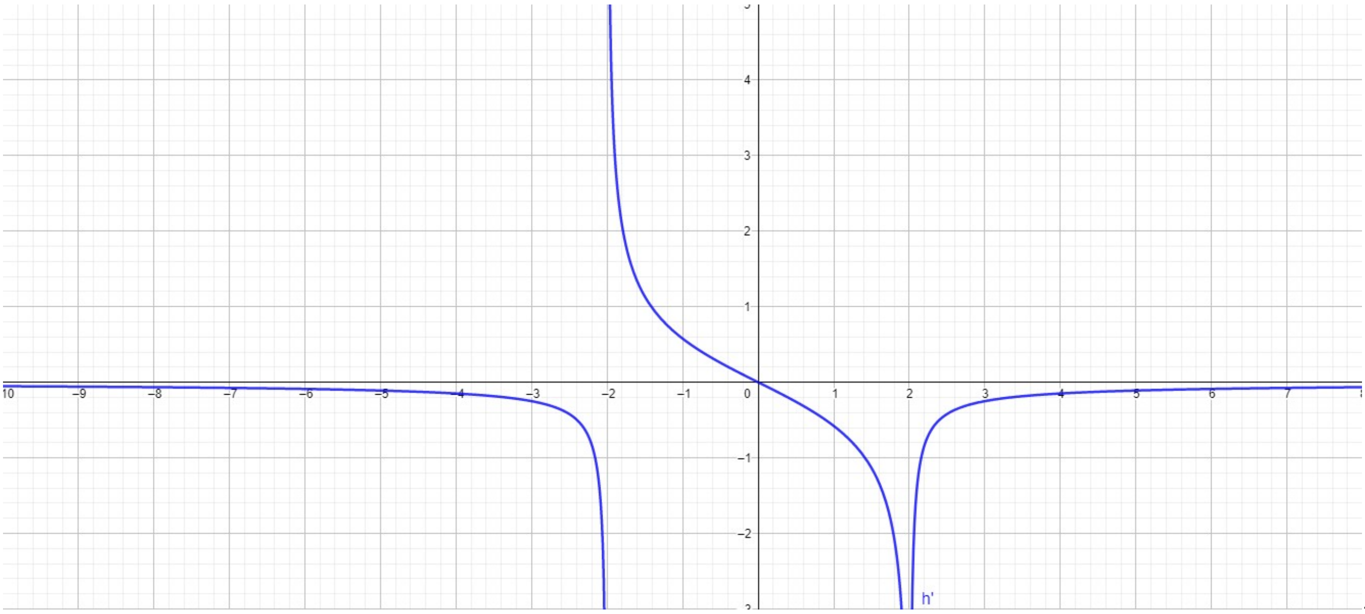
Esercizio 4 (5 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di funzione



Disegnarne approssimativamente la sua derivata.



Soluzione:



.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Stabilire se i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti o indipendenti: $(1,-1,0,1)$, $(2,1,0,-1)$, $(3,0,1,2)$.

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, $C = AB$.

(3) Trovare il rango della matrice C calcolata al punto precedente.

Soluzione:

(1) I vettori sono indipendenti perché il rango della matrice associata è massimo, e quindi pari a 3.

(2)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 11 \\ -2 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(3) Il rango di C è 2.

Esercizio 6 (5 punti)**.** Discutere le soluzioni del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 0 \\ kx + y - z = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Soluzione: La matrice del sistema ha determinare pari a $k^2 - 1$. Poiché il sistema è omogeneo e formato da 3 equazioni e 3 incognite, la soluzione esisterà unica e banale ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) quando $k \neq -1$ e $k \neq 1$. Per $k = -1$ e $k = 1$ si avranno infinite soluzioni.