ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
13/04/2022

APPELLO STRAORDINARIO
(RISERVATO FUORICORSO E STUDENTI CON ALMENO 106CFU)

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Data la legge di Boyle, la pressione P di un campione di gas è legata al volume V del gas dalla relazione

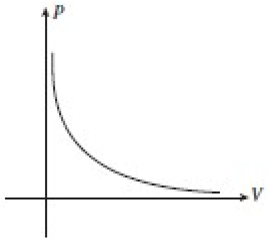
$$P = f(V) = \frac{k}{V},$$

dove k è una costante.

(1) Qual è il dominio della funzione f?
(2) Disegnare il grafico di f.
(3) Qual è la funzione g che descrive il volume in funzione della pressione?
(4) Se campione di cloro gassoso occupa un volume di 946 mL ad una pressione di 726 mmHg, qual è la pressione del gas (in mmHg) se il volume è ridotto a 154 mL?

Soluzione:

(1) Poichè V è un volume, il dominio è $(0, +\infty)$.
(2) Il grafico è:



(3) $V = g(P) = \frac{k}{P}$.
(4) Si ha $k = V \cdot P$. Quindi $946 \cdot 726 = P \cdot 154$ implica $P = \frac{946 \cdot 726}{154} = 4460$ mmHg.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} + \log(\arcsin(x^2 - x))$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione:

(1) $Dom\,(f) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

(2)

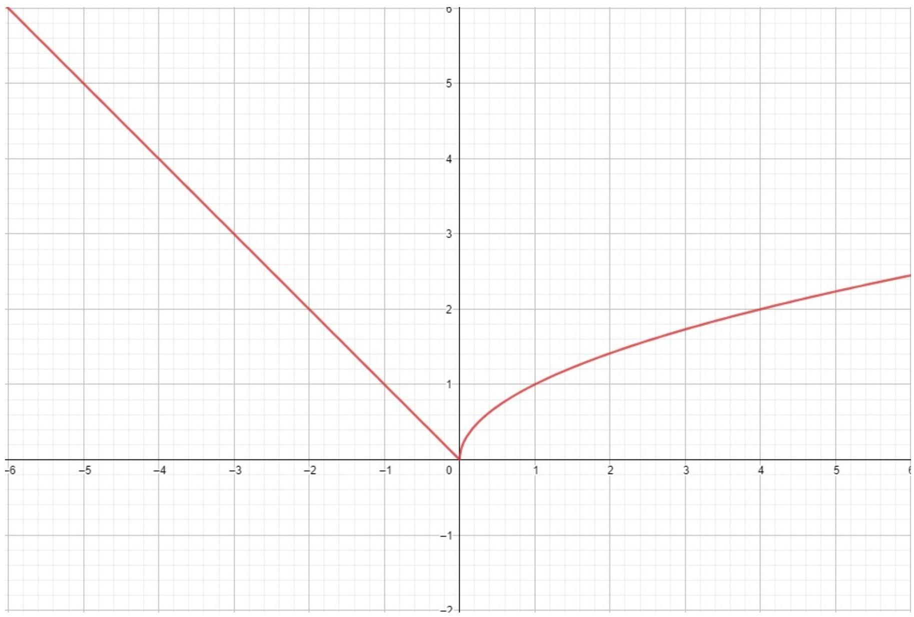
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}} \cdot \frac{-4}{(2x-1)^2} + \frac{2x-1}{\arcsin(x^2-x)\sqrt{1-(x^2-x)^2}}$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 0$.

Soluzione:



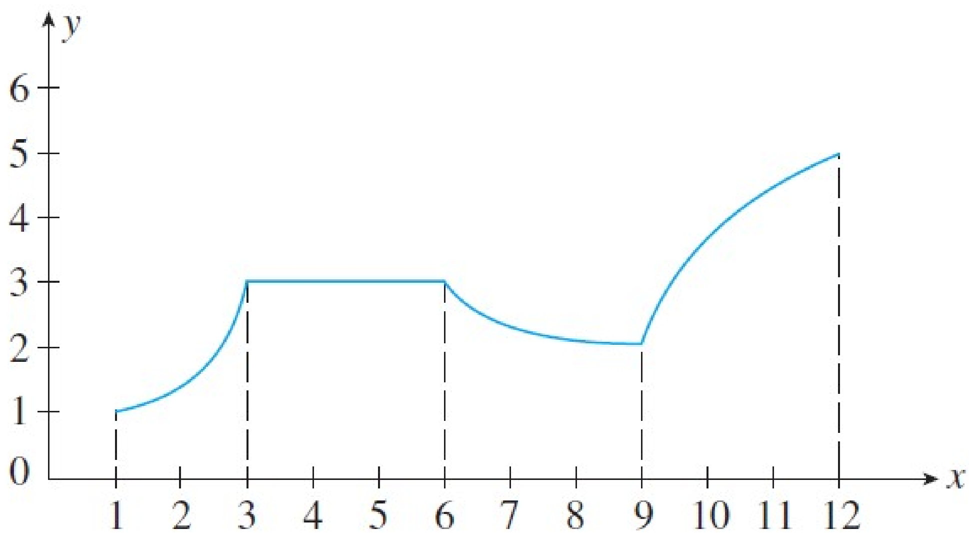
(1) Per la continuità, notiamo che $f(0) = 0$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

(2) Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 0.

Esercizio 4 (5 punti)**.** In riferimento alla seguente figura, **motivando ogni risposta**,



,

Qual è il segno di:

(1) $f'(2)$;
(2) $f'(x)$ nell'intervallo $(1,3)$;
(3) $f'(4)$;
(4) $f'(x)$ nell'intervallo $(3,6)$;
(5) $f'(7)$;
(6) $f''(x)$ nell'intervallo $(6,9)$;
(7) $f''(x)$ nell'intervallo $(9,12)$;

Soluzione: Si ha

(1) $f'(2) > 0$ poichè f è crescente;
(2) $f'(x) > 0$ nell'intervallo $(1, 3)$ poichè f è crescente;
(3) $f'(4) = 0$ poichè è f è costante;
(4) $f'(x) = 0$ nell'intervallo $(3, 6)$ poichè è f è costante;
(5) $f'(7) < 0$ poichè è f è decrescente;
(6) $f''(x) > 0$ nell'intervallo $(6, 9)$ poichè f è convessa;
(7) $f''(x) < 0$ nell'intervallo $(9, 12)$ poichè f è concava.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Date le matrici

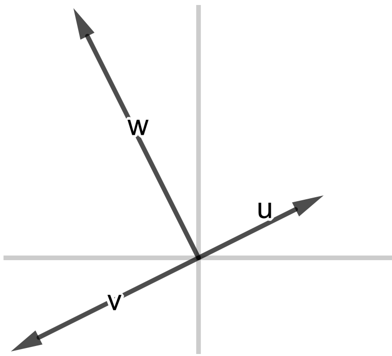
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(3) Si considerino i seguenti vettori.



(a) Il vettore v è combinazione lineare di u e w?
(b) Il vettore w è combinazione lineare di u e v?
(c) I vettori u, v e w sono linearmente indipendenti?
(d) I vettori u, v e w generano $\mathbb{R}^2$?
(e) I vettori u, v e w sono una base di $\mathbb{R}^2$?

Soluzione:

(1) La matrice $C = AB$ è la seguente matrice 3x1:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2) La sottomatrice $E = (1)$ di dimensione 1x1 ottenuta considerando la prima riga e la prima colonna ha determinante pari a 1 (in particolare, diverso da 0). (Il rango è perciò almeno 1.) Ciascuno dei quattro orlati di E, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

ha determinante pari a 0. Perciò, per il teorema degli orlati, il rango di D è 1.

Soluzione alternativa: ricordiamo che il rango di una matrice è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti. La prima colonna, cioè il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, è non nulla: perciò esiste almeno un vettore linearmente indipendente (e quindi il rango è almeno 1). Ogni colonna è multiplo di una qualsiasi altra colonna; perciò, il massimo numero di colonne linearmente dipendenti non è maggiore di 1. Perciò il rango è 1.

(3) (a) Sì, il vettore v è combinazione lineare di u e w. Infatti, dato che i vettori v e u sono non nulli e giacciono sulla stessa retta, v è un multiplo di u, cioè esiste un numero reale λ tale che $v = \lambda u$, e quindi $v = \lambda u + 0w$. Oppure: il sottospazio vettoriale generato da u e w (= il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ a cui u e w appartengono = l'insieme di combinazioni lineari di u e w) è il piano $\mathbb{R}^2$, a cui il vettore v appartiene.

(b) No, il vettore w non è combinazione lineare di u e v. Infatti, w non appartiene alla retta a cui u e v appartengono, che è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generato da u e v.

(c) No, i vettori non sono linearmente indipendenti. Tre vettori di $\mathbb{R}^2$ non possono essere linearmente indipendenti (perché $3 > 2$; ricordiamo che se k vettori in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti, allora $k \leq n$). Soluzione alternativa: poichè v è combinazione lineare di u e w, i vettori sono linearmente dipendenti.

(d) Sì, i vettori u, v e w generano $\mathbb{R}^2$. Infatti, non esiste alcuna retta che li contiene tutti, e quindi il più piccolo sottospazio vettoriale che li contiene è $\mathbb{R}^2$.

(e) No, i vettori u, v e w non sono una base di $\mathbb{R}^2$. Infatti, ogni base di $\mathbb{R}^2$ è composta esattamente da 2 vettori. Alternativamente: u, v e w non sono linearmente indipendenti (vedi punto (3c)), e quindi non sono neanche una base.

Esercizio 6 (5 punti)**.** Stabilire il numero di soluzioni del seguente sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} kx + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 - k. \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema scritto in forma matriciale è il seguente.

$$\begin{pmatrix} k & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - k \end{pmatrix}.$$

Denotiamo con A la matrice incompleta $\begin{pmatrix} k & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 - k \end{pmatrix}$, e con $(A \mid \mathbf{b})$ la matrice completa $\begin{pmatrix} k & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 - k \end{pmatrix}$. La matrice A ha come sottomatrice la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è pari a 5 (e quindi diverso da 0) (per ogni k). Perciò il rango di A è almeno 2. Non può essere maggiore di 2 perché A ha 2 righe. Perciò il rango di A è 2. Ricordiamo che la matrice completa ha rango maggiore o uguale del rango della matrice incompleta. Perciò, il rango di $(A \mid \mathbf{b})$ è maggiore o uguale a 2; in effetti, il rango di $(A \mid \mathbf{b})$ non è maggiore di 2 perché $(A \mid \mathbf{b})$ ha 2 righe. Perciò il rango di $(A \mid \mathbf{b})$ è 2. Quindi, qualsiasi sia k, abbiamo

$$2 = rg(A) = rg(A \mid \mathbf{b}) \neq 3 = \text{numero di incognite.}$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli, per ogni $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette infinite soluzioni.