ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
14/11/2022

APPELLO STRAORDINARIO

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

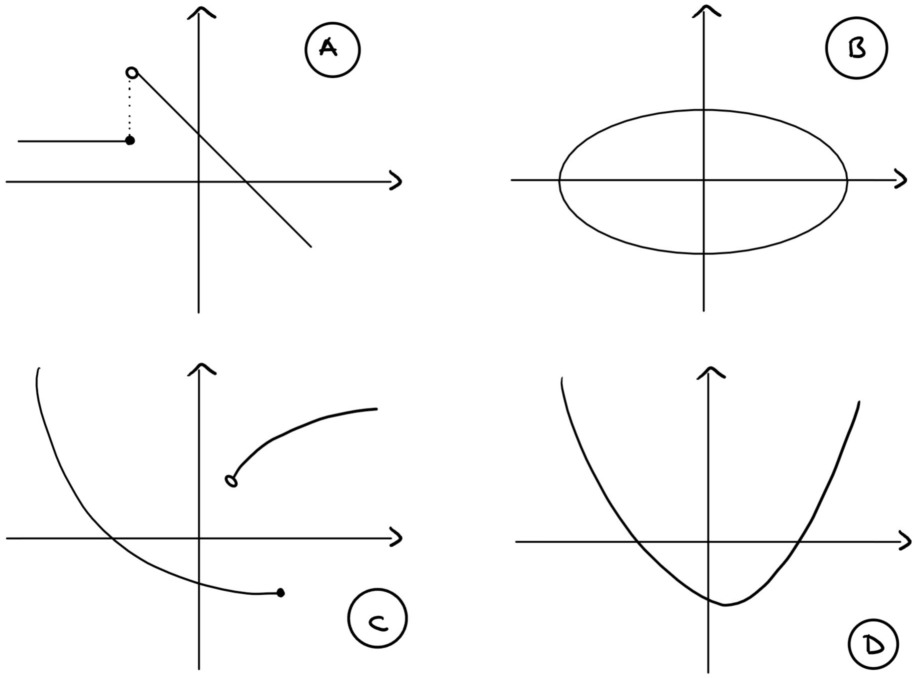
(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Dati i seguenti grafici, stabilire **motivando la risposta**, quali tra A, B, C e D sono grafici di funzioni.



Soluzione: Le funzioni sono A e D. Che B e C non sono funzioni si verifica facilmente con la "prova" della retta verticale.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 + 2x + 3)} + \cos\left(\frac{3x^2}{e^{3x} - 2}\right)$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione: Le condizioni di esistenza sono $\log(x^2 + 2x + 3) \geq 0$, $x^2 + 2x + 3 > 0$ e $e^{3x} - 2 \neq 0$ cioè

$$x^2 + 2x + 3 \geq 1, \qquad \text{e} \qquad x \neq \frac{\log(2)}{3}$$

Quindi $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\log(2)}{3}\right\}$.

Mentre

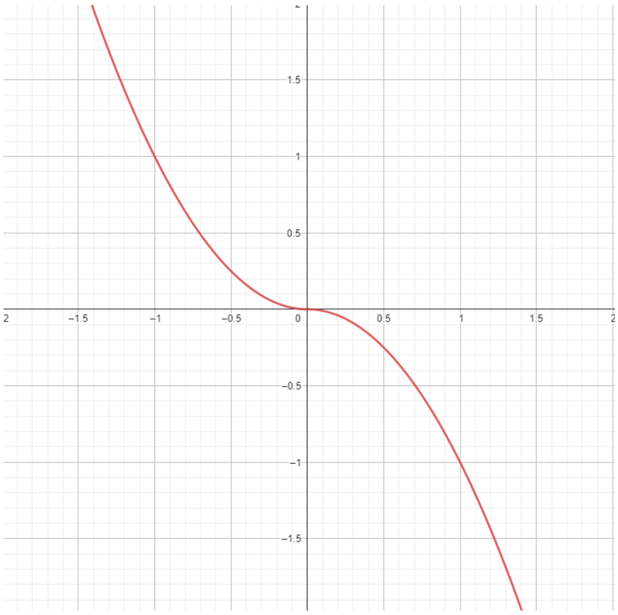
$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{\log(x^2 + 2x + 3)}(x^2 + 2x + 3)} - \sin\left(\frac{3x^2}{e^{3x} - 2}\right) \frac{6x(e^{3x} - 2) - (3x^2)3e^{3x}}{(e^{3x} - 2)^2}.$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x = 0$.

Soluzione:



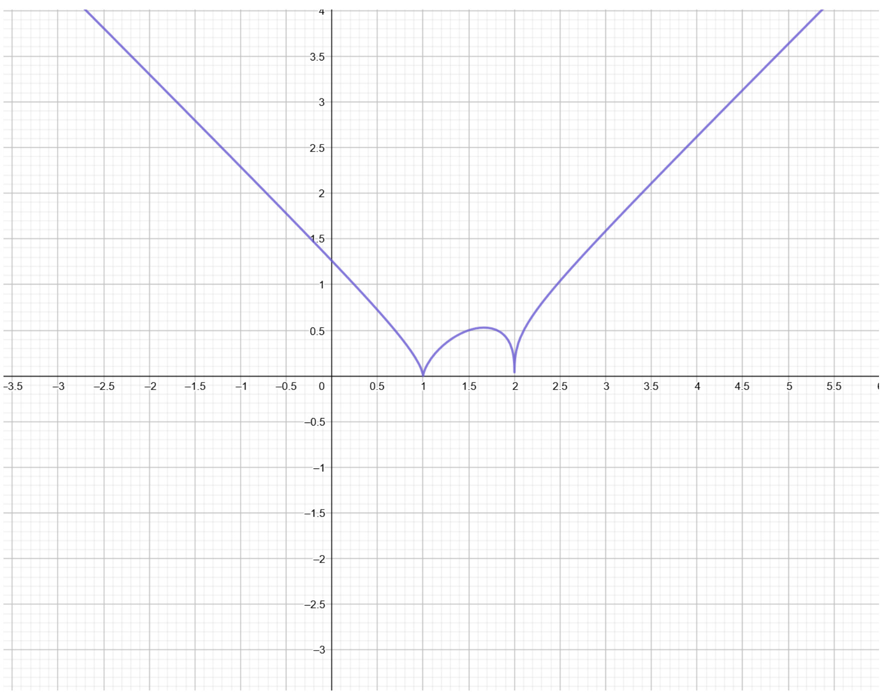
(1) Notiamo che $f(0) = 0$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -x^2 = 0$, quindi f è continua in $x = 0$.

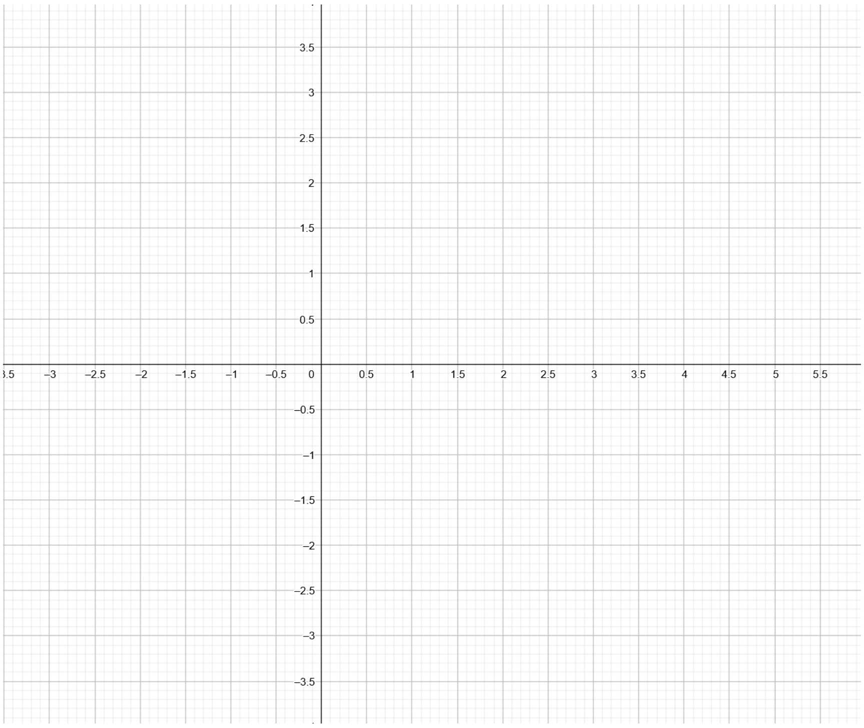
(2) Per la derivabilità:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

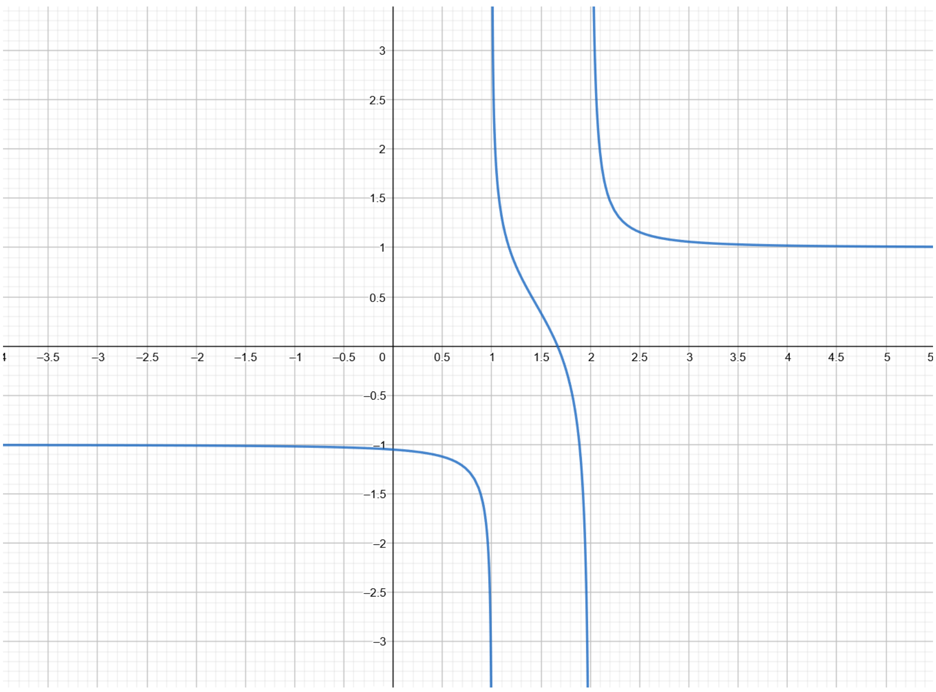
Quindi f è derivabile in 0.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Data la seguente funzione, disegnare in maniera approssimativa la sua derivata





Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.**

(1) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

calcolare il prodotto $C = AB$.

(2) Trovare il rango della matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

motivando la risposta.

(3) Stabilire se i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, **motivando la risposta**.

Soluzione:

(1) La matrice $C = AB$ è
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) La sottomatrice
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
di D ha determinante pari a -1, quindi diverso da 0. I due orlati 3×3 di E hanno determinante pari a 0. Perciò, per il teorema degli orlati, il rango di D è 2.

(3) La risposta è no. Ricordiamo che una lista di vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango della matrice ottenuta accostandoli è pari al numero di vettori. Quindi, 3 vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango della matrice ottenuta accostandoli è 3. Per l'esercizio precedente, la matrice ottenuta accostando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ha rango 2, quindi diverso da 3; perciò, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono linearmente indipendenti.

Soluzione alternativa: $\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$. Poichè uno dei tre vettori si scrive come combinazione lineare degli altri, non sono linearmente indipendenti.

Soluzione alternativa: $-3\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{z}$ è il vettore nullo. Quindi, il vettore nullo si scrive come combinazione lineare a coefficienti tutti non nulli di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (i coefficienti sono -3, 3, -1). Perciò, non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6 (5 punti)**.** Trovare le soluzioni del seguente sistema lineare, motivando la risposta.
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x - y + z = 1 \\ -3x - 2z = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Soluzione 1: Risoluzione col metodo di Gauss. La matrice completa associata al sistema è
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$
Sostituendo alla riga 2 la somma tra la riga 2 e il doppio della riga 1, e sostituendo alla riga 3 la somma tra la riga 3 e il triplo della riga 1, otteniamo
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right]$$
Sostituendo alla riga 3 la riga 3 meno il triplo della riga 2, otteniamo
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
Perciò, il sistema originale ha le stesse soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$
che si può riscivere come
$$\begin{cases} x = -y - 1 \\ y = -z - 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Per la terza equazione, $z = 0$. Perciò, per la seconda equazione, $y = -z - 1 = 0 - 1 = -1$. Perciò, per la prima equazione, $x = -(-1) - 1 = 0$.

Soluzione 2: Utilizzando il metodo di Cramer. La matrice incompleta associata al sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è 1. Poiché è diverso da 0, possiamo applicare direttamente il metodo di Cramer.

$$x = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} / \det(A) = 0/1 = 0.$$

$$y = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} / \det(A) = -1/1 = -1.$$

$$z = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} / \det(A) = 0/1 = 0.$$