ESAME DI METODI MATEMATICI PER LE SCIENZE AMBIENTALI

17 APRILE 2023

Nome: ________________________________

Cognome: ________________________________

Matricola: ________________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e 30 minuti**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \sin\left(\log\left(\frac{2x^2-1}{x-2}\right)\right).$$

Soluzione: Per determinare il dominio, osserivamo che sin è sempre definita, quindi dobbiamo risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{2x^2-1}{x-2} > 0.$$

Il numeratore ha soluzione:

$$2x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Il denominatore invece $x > 2$. Facendo il diagramma segni ricaviamo

$$D(f) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

La derivata è

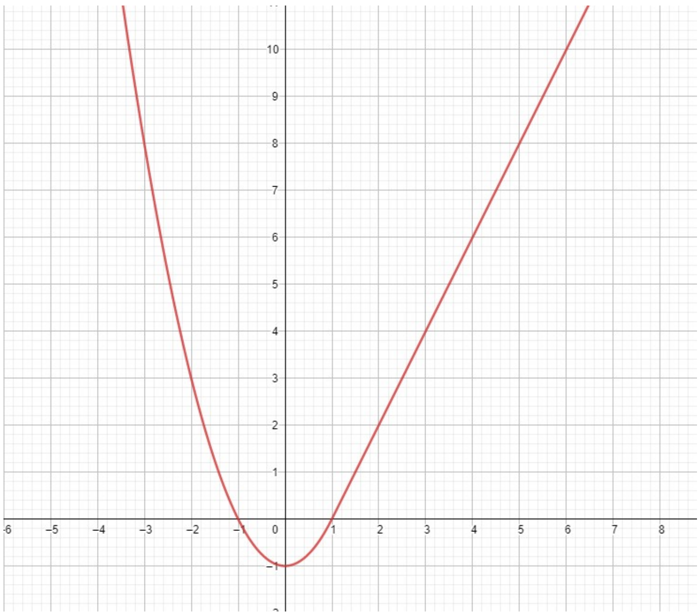
$$f'(x) = \cos\left(\log\left(\frac{2x^2-1}{x-2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\frac{2x^2-1}{x-2}} \cdot \frac{4x(x-2)-(2x^2-1)}{(x-2)^2}$$

Esercizio 2 (4 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ 2x - 2 & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 0$ e che $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x^2 - 1 = 0$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} 2x - 2 = 0$.

(2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{2x-2} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x-2-0}{2x-2} = \lim_{x\to1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

Quindi f è continua e derivabile in 1.

Esercizio 3 (5 punti)**.** Classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2.$$

Soluzione: Per determinare i punti critici occorre osservare quali di essi annullano il gradiente. Si calcolano quindi:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2-2y, \\ f_y(x,y) &= -2x+2y, \end{aligned}$$

e si risolve il sistema:

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \cup \begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{2}{3}, \end{cases}.$$

Si hanno i punti critici $A=(0,0)\,, B=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Calcoliamo le derivate seconde per determinare la natura di questi punti:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x, \\ f_{yy} &= 2, \\ f_{xy} &= -2, \end{aligned}$$

da cui risulta:

$$\begin{aligned} H(0,0) &= -4<0 \Rightarrow A \text{ punto di sella} \\ H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) &= 4>0, f_{xx}(0,0)=4>0 \Rightarrow B \text{ punto di minimo relativo} \end{aligned}$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Soluzione: Ricordando le formule di duplicazione:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx = 2\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Ponendo $t=\cos x$, si ha $dt=-\sin x dx$, per cui:

$$2\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx = -2\int \frac{t}{1+t^2}dt = -\log|1+t^2|+c = -\log|1+\cos^2 x|+c.$$

Esercizio 5 (5 punti)**.** Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = xe^{x-y}.$$

Soluzione: E' un'equazione a variabili separabili, per cui:

$$\begin{gathered} y' = \frac{e^x x}{e^y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x x}{e^y} \Leftrightarrow e^y dy = e^x x dx \\ \Leftrightarrow \int e^y dy = \int e^x x dx \Leftrightarrow e^y = xe^x - e^x + c \\ \Leftrightarrow y = \log(xe^x - e^x + c), \end{gathered}$$

Esercizio 6 (3 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile, $C=AB$.

(2) Trovare il <u>rango</u> della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
   (a) Quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti;
   (b) Un sistema di 3 equazioni e 3 incognite ammette sempre una soluzione.

Soluzione:

(1) Non è possibile fare il prodotto AB perchè le matrici hanno dimensioni incompatibili.
(2) Il rango è 2.
(3) La prima affermazione è vera (in $\mathbb{R}^3$ possiamo avere al massimo 3 vettori indipendenti) mentre la seconda è falsa (cfr il Teorema di Rouchè-Capelli).

Esercizio 7 (5 punti)**.** Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - ky + z = -1 \\ ky - z = 1 \\ kx + 4z = -1 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette una unica soluzione.

Soluzione: Osservando che

$$det \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4k$$

abbiamo che il sistema lineare dato ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 0$.