

ESAME DI MATEMATICA 1

17 APRILE 2023

Nome: _____

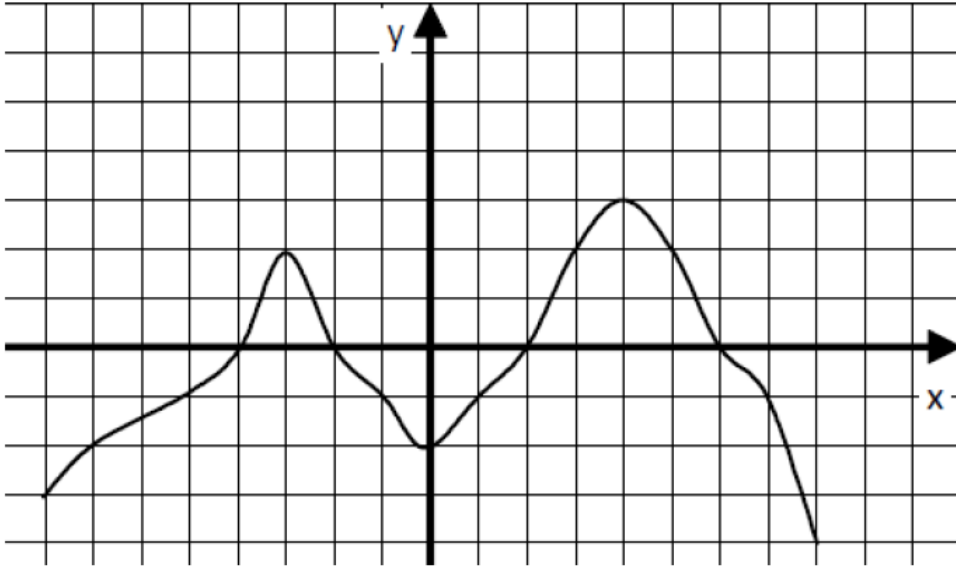
Cognome: _____

Matricola: _____

ISTRUZIONI, leggere attentamente.

- (1) Tempo massimo: **2 ore**.
- (2) Voto massimo: **30/30**.
- (3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.
- (4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
- (5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.
- (6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- (7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.
- (8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.
- (9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti). In figura è rappresentato il grafico di una funzione $f: [-8, 8] \rightarrow \mathbb{R}$. Sappiamo che ogni quadretto corrisponde ad una unità. Motivando ogni risposta, rispondere alle seguenti domande:



- La funzione è iniettiva?
- Quanto vale $f(5)$?
- Quali sono gli elementi che costituiscono l'insieme $\{a \in [-8, 8] \mid f(a) = 2\}$?

Soluzione:

- (1) La funzione non è iniettiva, ad esempio $f(-2) = f(2) = 0$.
- (2) Si ha $f(5) = 2$.
- (3) $\{a \in [-8, 8] \mid f(a) = 2\} = \{-4, 3, 5\}$.

Esercizio 2 (7 punti). Determinare il dominio e la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \sin \left(\log \left(\frac{2x^2 - 1}{x - 2} \right) \right).$$

Soluzione: Per determinare il dominio, osserviamo che \sin è sempre definita, quindi dobbiamo risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{2x^2 - 1}{x - 2} > 0.$$

Il numeratore ha soluzione:

$$2x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Il denominatore invece $x > 2$. Facendo il diagramma segni ricaviamo

$$D(f) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup (2, +\infty).$$

La derivata è

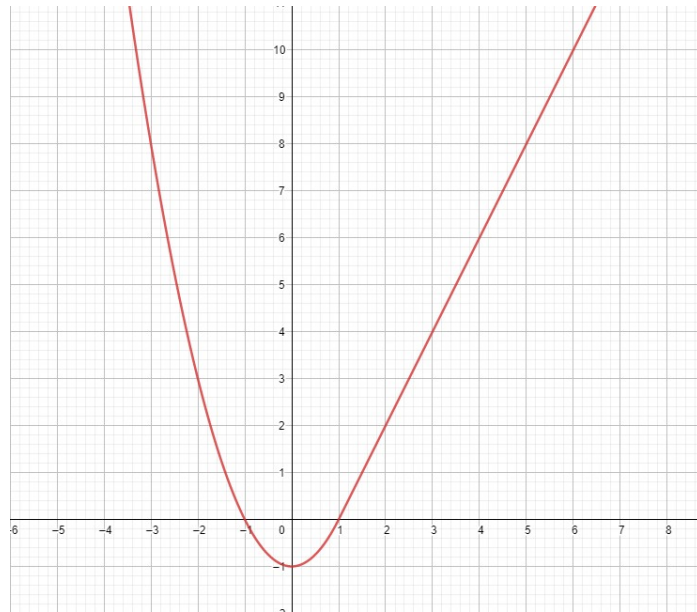
$$f'(x) = \cos \left(\log \left(\frac{2x^2 - 1}{x - 2} \right) \right) \cdot \frac{1}{\frac{2x^2 - 1}{x - 2}} \cdot \frac{4x(x - 2) - (2x^2 - 1)}{(x - 2)^2}$$

Esercizio 3 (5 punti). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ 2x - 2 & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



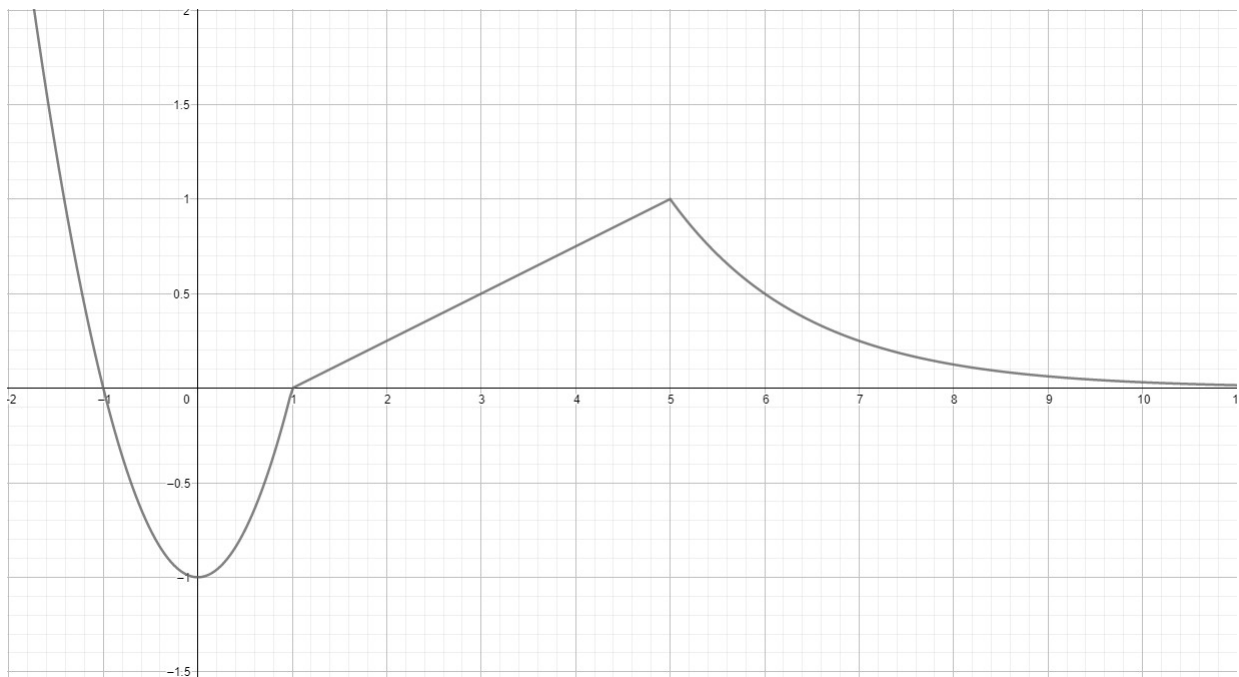
- (1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 0$ e che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 2 = 0$.
- (2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2$$

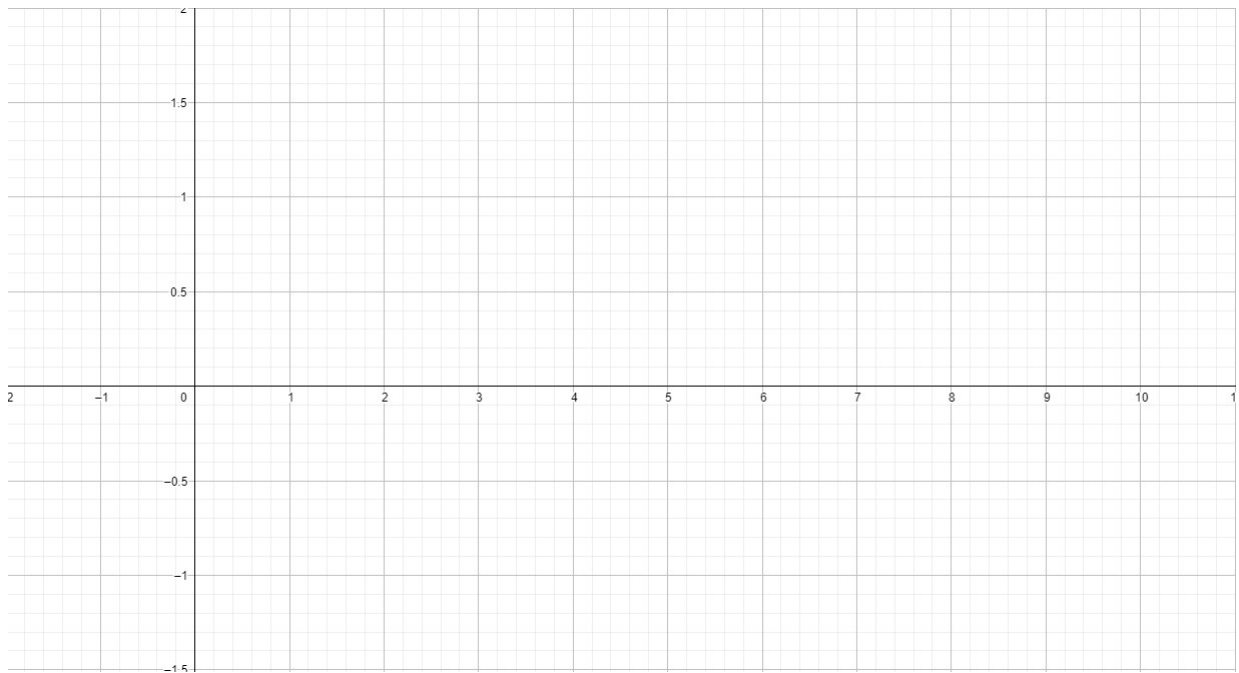
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2 - 0}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{2(x - 1)} = 2.$$

Quindi f è continua e derivabile in 1.

Esercizio 4 (5 punti). Data la seguente funzione



disegnarne la derivata



Soluzione:



Esercizio 5 (5 punti). Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile, $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.

- Quattro vettori in \mathbb{R}^3 sono linearmente dipendenti;
- Un sistema di 3 equazioni e 3 incognite ammette sempre una soluzione.

Soluzione:

- (1) Non è possibile fare il prodotto AB perchè le matrici hanno dimensioni incompatibili.
- (2) Il rango è 2.
- (3) La prima affermazione è vera (in \mathbb{R}^3 possiamo avere al massimo 3 vettori indipendenti) mentre la seconda è falsa (cfr il Teorema di Rouchè-Capelli).

Esercizio 6 (6 punti). Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - ky + z = -1 \\ ky - z = 1 \\ kx + 4z = -1 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette una unica soluzione.

Soluzione: Osservando che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4k$$

abbiamo che il sistema lineare dato ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 0$.