ESAME DI MATEMATICA 1

19 GIUGNO 2023

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti)**.** Scegliendo a piacere dominio e codominio, fornire un esempio di

(1) Una funzione che è iniettiva ma non suriettiva;
(2) Una funzione che è suriettiva ma non iniettiva;
(3) Una funzione che è biettiva.

Soluzione:

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$.
(2) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Determinare il campo di esistenza e la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log\left(5x^2 - 4x\right)}{x+3}}.$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\log\left(5x^2-4x\right)}{x+3} \geq 0 \\ 5x^2 - 4x > 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione:

$$+\left\| \begin{array}{l} \log\left(5x^2 - 4x\right) \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow^{+} \left\| \begin{array}{l} \log\left(5x^2 - 4x\right) \geq \log 1 \\ x > -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow^{+} \left\| \begin{array}{l} 5x^2 - 4x - 1 \geq 0 \\ x > -3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow^{+} \left\| \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1 \\ x > -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow -3 < x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1.$$

La seconda disequazione ha per soluzione $x < 0 \cup x > \frac{4}{5}$.

La terza condizione è verificata per $x \neq -3$, quindi $D = \left]-3; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty[$.
La derivata è

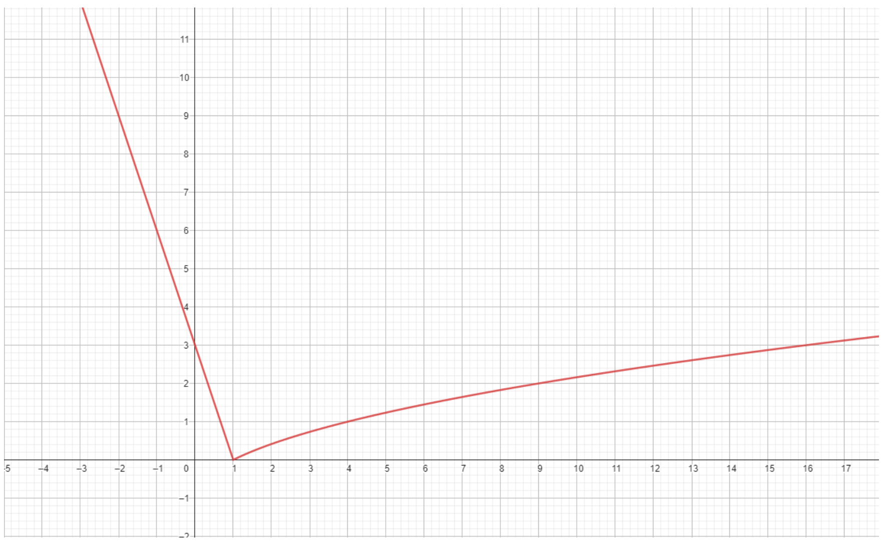
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\log(5x^2-4x)}{x+3}}} \cdot \frac{\frac{10x-4}{5x^2-4x}(x+3) - \log\left(5x^2 - 4x\right)}{(x+3)^2}$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 3 & x \leq 1 \\ \sqrt{x} - 1 & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



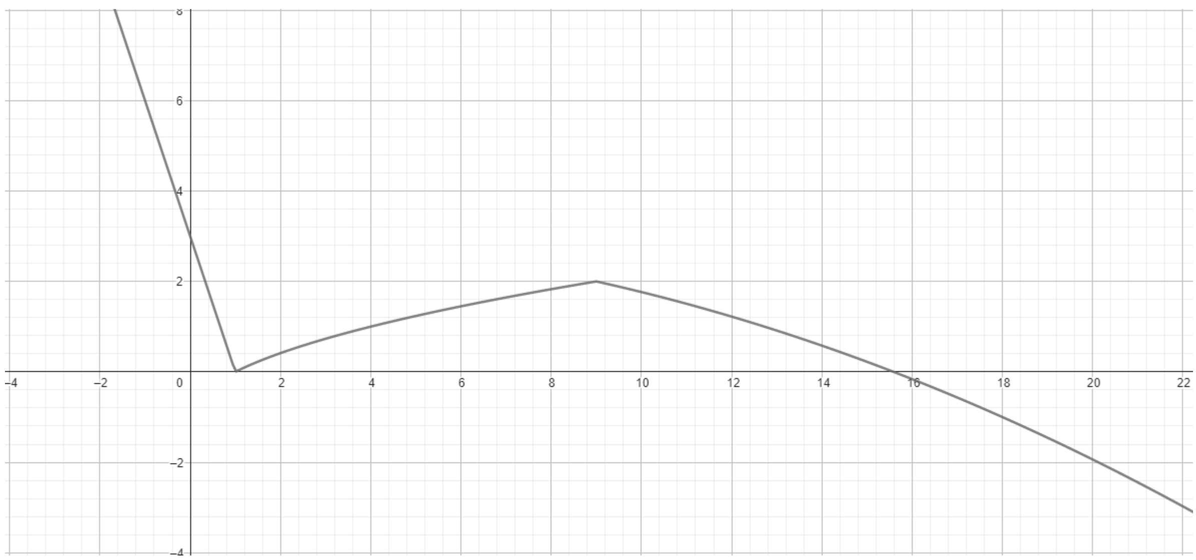
(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 0$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -3x + 3 = 0$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} - 1 = 0$.

(2) Per la derivabilità, si ha che

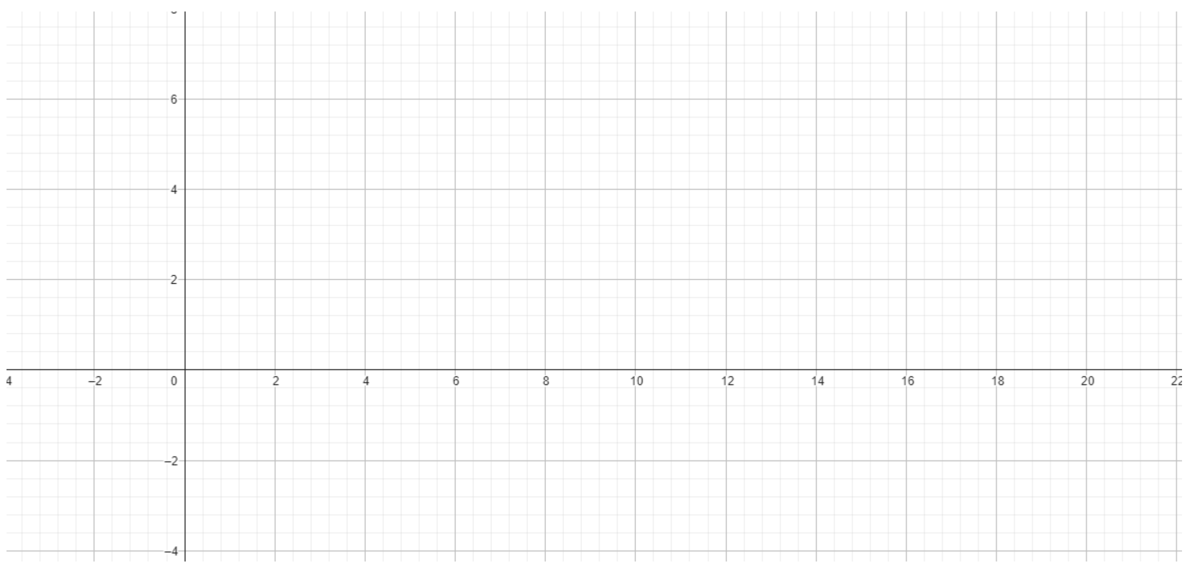
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3(x-1)}{x-1} = -3$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

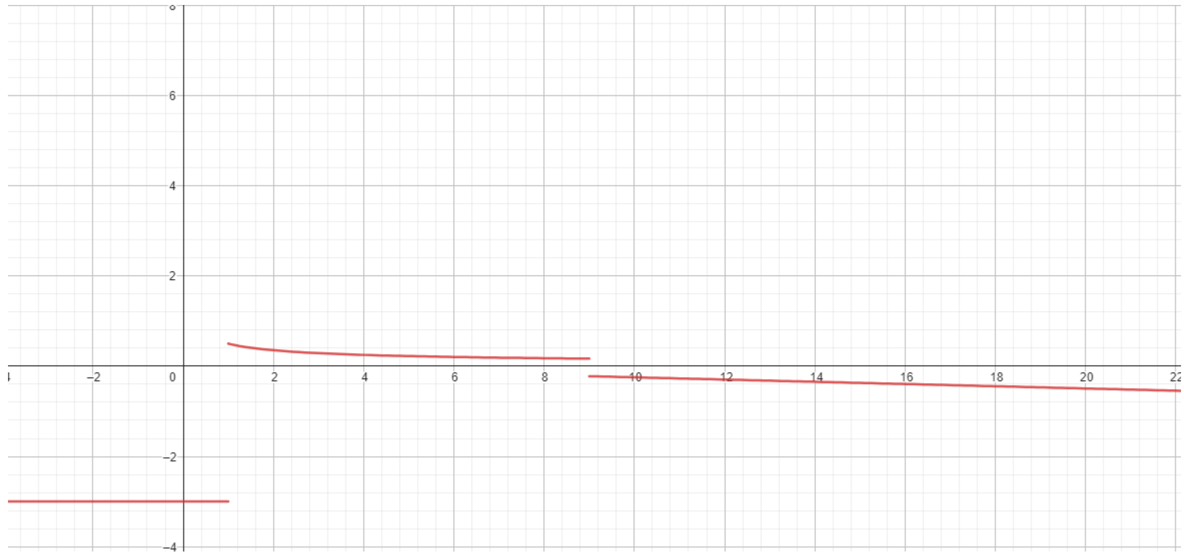
Esercizio 4 (5 punti)**.** Data la seguente funzione



disegnarne la derivata



Soluzione:



Esercizio 5 (5 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
calcolare, se possibile, $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
   (a) I vettori $(-1, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$ e $(0, 5, 3)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$;
   (b) In $\mathbb{R}^2$ i vettori $(2, 1)$ e $(3, -1)$ giacciono sulla stessa retta per l'origine.

Soluzione:

(1) Non è possibile fare il prodotto AB perchè le matrici hanno dimensioni incompatibili.
(2) Il rango è 3.
(3) La prima affermazione è vera (è un insieme formato da 3 vettori linearmente indipendenti) mentre la seconda è falsa (sono vettori linearmente indipendenti).

Esercizio 6 (6 punti)**.** Dato il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - ky + z = 1 \\ x + y - kz = -1 \end{cases}$$
stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette una unica soluzione.

Soluzione: Osservando che
$$det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix} = 2(k^2 - 1),$$
abbiamo che il sistema lineare dato ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 1, -1$.