ESAME DI METODI MATEMATICI PER LE SCIENZE AMBIENTALI

19 GIUGNO 2023

Nome: ____

Cognome: ____

Matricola: ____

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e 30 minuti**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.**
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log\left(5x^2 - 4x\right)}{x+3}}.$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\log\left(5x^2-4x\right)}{x+3} \geq 0 \\ 5x^2 - 4x > 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione:

$$+\left\|\begin{array}{l} \log\left(5x^2 - 4x\right) \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow^{+} \left\|\begin{array}{l} \log\left(5x^2 - 4x\right) \geq \log 1 \\ x > -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow^{+} \left\|\begin{array}{l} 5x^2 - 4x - 1 \geq 0 \\ x > -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow^{+} \left\|\begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1 \\ x > -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3 < x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1.$$

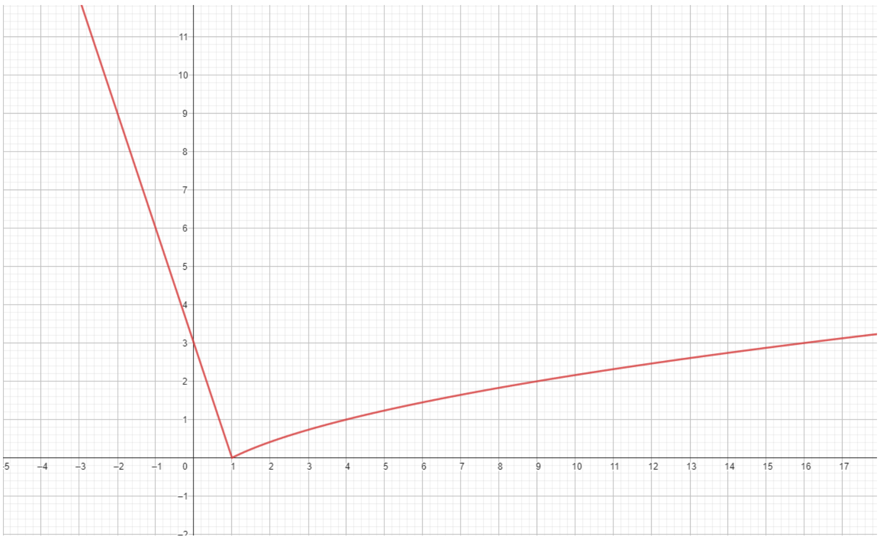
La seconda disequazione ha per soluzione $x < 0 \cup x > \frac{4}{5}$.
La terza condizione è verificata per $x \neq -3$, quindi $D = \left]-3; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty[$.

Esercizio 2 (4 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 3 & x \leq 1 \\ \sqrt{x} - 1 & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 0$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -3x + 3 = 0$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} - 1 = 0$.

(2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3x + 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3(x-1)}{x - 1} = -3$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

Esercizio 3 (5 punti)**.**
Classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y + \frac{5}{4}.$$

Soluzione: Per determinare i punti critici occorre osservare quali di essi annullano il gradiente. Si calcolano quindi:

$$f_x(x,y) = 2x - 2,$$
$$f_y(x,y) = 2y - 1.$$

e si risolve il sistema:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases} .$$

Si ha il punto critico $A = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Calcoliamo le derivate seconde per determinare la natura di questo punto:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2, \\ f_{yy} &= 2, \\ f_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

da cui risulta:

$$H\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4 > 0, f_{xx}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow A \text{ punto di minimo relativo}$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 1}.$$

Soluzione: Il denominatore può essere scomposto come:

$$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1),$$

quindi la funzione integranda si scompone in fratti semplici:

$$\frac{1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}.$$

Per cui:

$$\int \frac{dx}{4x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{4}\log|2x-1| - \frac{1}{4}\log|2x+1| + c.$$

Esercizio 5 (5 punti)**.** Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y = \sin x.$$

Soluzione: Risolviamo prima l'omogenea associata. Il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \ = \pm i.$$

L'integrale generale dell'omogenea è:

$$y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

L'integrale particolare è:

$$y_p(x) = x\left(A \cos x + B \sin x\right).$$

Imponendo che sia soluzione otteniamo

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0,$$

per cui l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x \cos x}{2}.$$

Esercizio 6 (3 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile, $C = AB$.

(2) Trovare il <u>rango</u> della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
   (a) I vettori $(-1, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$ e $(0, 5, 3)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$;
   (b) In $\mathbb{R}^2$ i vettori $(2, 1)$ e $(3, -1)$ giacciono sulla stessa retta per l'origine.

Soluzione:
(1) Non è possibile fare il prodotto AB perchè le matrici hanno dimensioni incompatibili.
(2) Il rango è 3.
(3) La prima affermazione è vera (è un insieme formato da 3 vettori linearmente indipendenti) mentre la seconda è falsa (sono vettori linearmente indipendenti).

Esercizio 7 (5 punti)**.** Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - ky + z = 1 \\ x + y - kz = -1 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette una unica soluzione.

Soluzione: Osservando che

$$det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix} = 2(k^2 - 1),$$

abbiamo che il sistema lineare dato ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 1, -1$.