ESAME DI METODI MATEMATICI PER LE SCIENZE AMBIENTALI

22 FEBBRAIO 2023

Nome: ________________________________

Cognome: ________________________________

Matricola: ________________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e 30 minuti**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \log_3\left(\frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2+1}\right).$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\frac{9}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2+1} > 0, \\ 3x^2+1 \neq 0. \end{array}\right.$$

La prima disequazione ha soluzione:

$$\frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2+1} > 0 \Leftrightarrow +\left\|\begin{array}{l} \frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0, \\ 3x^2+1 > 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow +\left\|\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^2, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \Leftrightarrow x < 2.$$

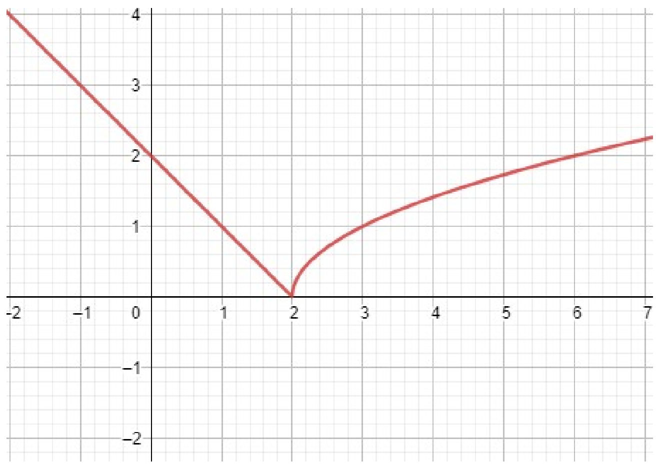
La quarta disuguaglianza è sempre verificata, quindi $D =]-\infty; 2[$.

Esercizio 2 (4 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 2$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(2) = 0$ e che $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -x+2 = 0$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$.

(2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x+2-0}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

Esercizio 3 (5 punti)**.** Classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 4xy - 2y^2 - 2y - 2x.$$

Soluzione: Per determinare i punti critici occorre osservare quali di essi annullano il gradiente. Si calcolano quindi:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= x^2 - 4y - 2, \\ f_y(x,y) &= -4x - 4y - 2, \end{aligned}$$

e si risolve il sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 4y - 2 = 0 \\ -4x - 4y - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 4x = 0, \\ y = -x - \frac{1}{2}, \end{array}\right. .$$

Si hanno i punti critici $A = \left(0, -\frac{1}{2}\right), B = \left(-4, \frac{7}{2}\right)$.

Calcoliamo le derivate seconde per determinare la natura di questi punti:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2x, \\ f_{yy} &= -4, \\ f_{xy} &= -4, \end{aligned}$$

da cui risulta:

$$H\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -16 < 0 \Rightarrow A \text{ punto di sella}$$

$$H\left(-4, \frac{7}{2}\right) = 16 > 0, f_{xx}\left(-4, \frac{7}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow B \text{ punto di massimo relativo}$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 4x^2 + 2x.$$

Soluzione: Le radici dell'equazione caratteristica della omogenea associata sono:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4;$$

quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea vale:

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}.$$

Un integrale particolare sarà nella forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

sostituendolo all'interno dell'equazione differenziale e utilizzando il principio di identità tra polinomi, si ottiene:

$$A = -1, B = -2, C = -2$$

e quindi l'integrale generale è:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - x^2 - 2x - 2.$$

Esercizio 5 (5 punti)**.** Risolvere il seguente integrale.

$$\int x \log(2+x) dx.$$

Soluzione: Si ha:

$$\begin{aligned} \int x \log(2+x) dx &= \frac{x^2}{2} \log(2+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+2} dx = \\ = \frac{x^2}{2} \log(2+x) &- \frac{1}{2} \left(\int (x-2) dx + 4 \int \frac{1}{x+2} dx \right) = \\ \frac{x^2}{2} \log(2+x) &- \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \log(2+x) \right) + c. \end{aligned}$$

Esercizio 6 (3 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
   (a) Tre vettori in $\mathbb{R}^3$ formano una base;
   (b) Sia $\mathbf{v}$ la somma dei vettori $(1,1,0)$ e $(2,5,-1)$. La terna $\{\mathbf{v}, (1,1,0), (2,5,-1)\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Soluzione:

(1)
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) Il rango è 1, perché tutte le sottomatrici 2x2 hanno determinante nullo.

(3) La prima affermazione è falsa (devono essere anche indipendenti) mentre la seconda è vera per definizione: $(-1)\mathbf{v} + 1\ (1,1,0) + 1\ (2,5,-1) = (0,0,0)$.

Esercizio 7 (5 punti)**.** Dato il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x - ky + z = -1 \\ ky - z = 1 \\ kx + 4z = -1 \end{cases}$$
discuterne la compatibilità e calcolarne le eventuali soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Osservando che
$$det \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4k$$
abbiamo che il sistema lineare dato ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 0$ che (con la regola di Cramer) è pari a:
$$\left(0, \frac{3}{4k}, -\frac{1}{4}\right)$$
Per $k = 0$, la matrice completa del sistema lineare dato diventa:
$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$
e avendosi $rg(A) = 2 \neq rg(A \mid b) = 3$, si conclude che il sistema lineare è incompatibile.