

ESAME DI MATEMATICA 1

22 FEBBRAIO 2023

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

ISTRUZIONI, leggere attentamente.

- (1) Tempo massimo: **2 ore**.
- (2) Voto massimo: **30/30**.
- (3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.
- (4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
- (5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.
- (6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- (7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.
- (8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.
- (9) **Buon lavoro!**

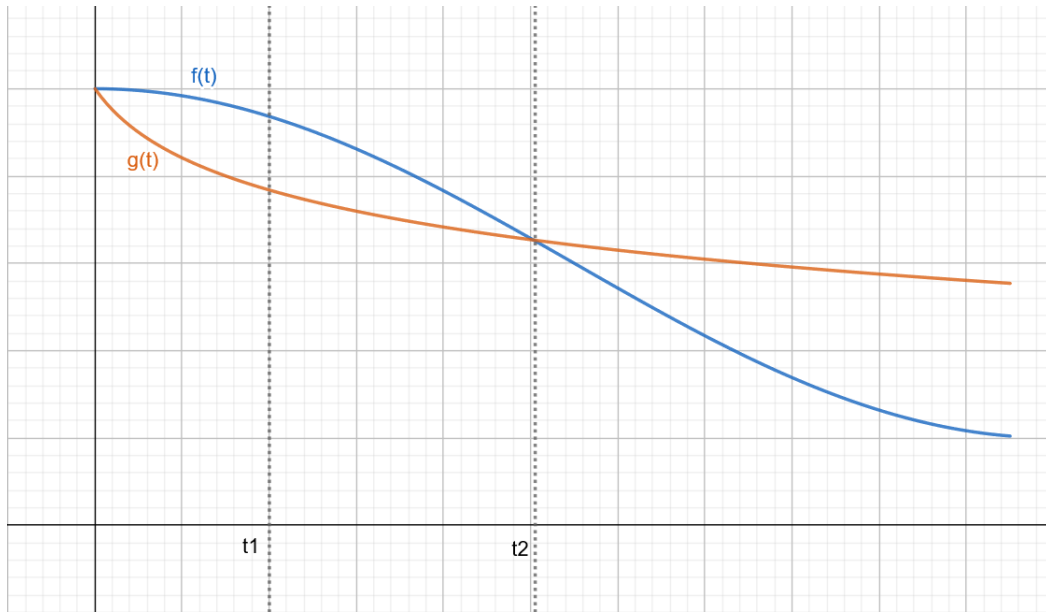
Esercizio 1 (3 punti). Nel grafico sottostante è raffigurata l'evoluzione di una popolazione di batteri dopo la somministrazione di due battericidi di tipo diverso.

L'andamento descritto dalla funzione $f(t)$ mostra la popolazione dopo aver somministrato un battericida A al tempo $t = 0$.

L'andamento descritto dalla funzione $g(t)$ si riferisce alla variazione della popolazione dopo la somministrazione del battericida B al tempo $t = 0$.

Descrivere l'efficacia dei due battericidi usando le informazioni nel grafico. In particolare,

- (1) Quale popolazione è più numerosa al tempo t_1 ?
- (2) Cosa si può dire delle popolazioni al tempo t_2 ?
- (3) Quale battericida si sta rivelando più efficace dopo il tempo t_2 ?



Soluzione: Per tempi $t \leq t_2$, la popolazione P_A , relativa al battericida A , presenta una concavità verso il basso, mentre la popolazione P_B , relativa al battericida B ha una concavità verso l'altro. Entrambe le funzioni sono decrescenti. Di conseguenza, le derivate prime sono entrambe negative. La derivata seconda di g è sempre positiva, rendendo g' crescente.

- (1) Al tempo t_1 , la popolazione P_A è più numerosa di P_B .
- (2) Al tempo t_2 , le due popolazioni hanno la stessa numerosità.
- (3) Dopo t_2 , il battericida A si dimostra più efficace.

Esercizio 2 (7 punti). Determinare il campo di esistenza e la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \log_3 \left(\frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2 + 1} \right).$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2 + 1} > 0, \\ 3x^2 + 1 \neq 0. \end{cases}$$

La prima disequazione ha soluzione:

$$\frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0, \\ 3x^2 + 1 > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^2, \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right., \Leftrightarrow x < 2.$$

La quarta disuguaglianza è sempre verificata, quindi $D =] - \infty; 2[$.

La derivata è

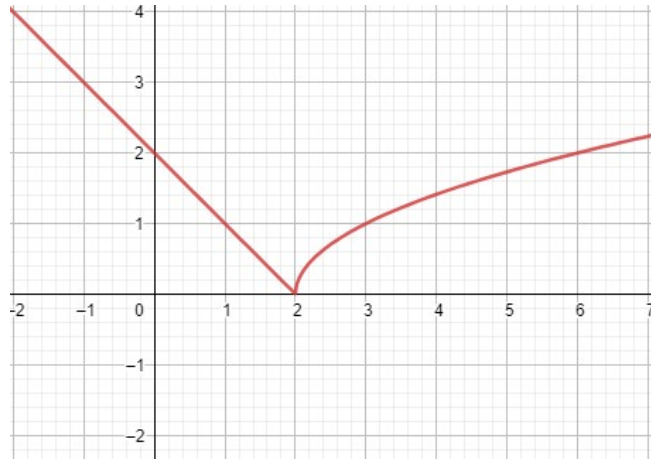
$$f'(x) = \log_3(e) \frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x}{3x^2 + 1} - \frac{(3x^2 + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^x \log\left(\frac{3}{2}\right) - 6x \left(\frac{9}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}{(3x^2 + 1)^2}.$$

Esercizio 3 (5 punti). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & x > 2. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 2$.

Soluzione:



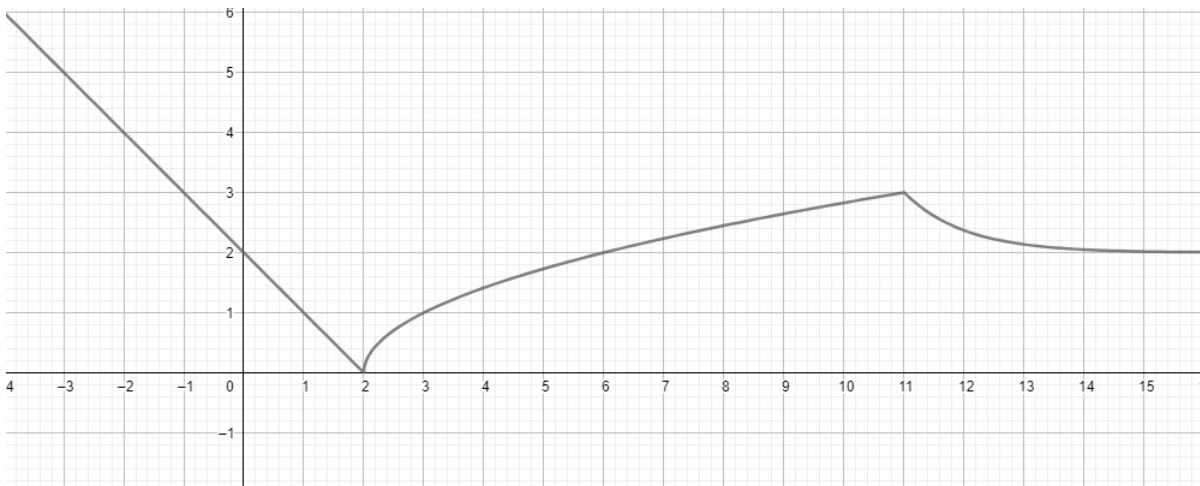
- (1) Per la continuità, notiamo che $f(2) = 0$ e che $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$.
- (2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2 - 0}{x - 2} = -1$$

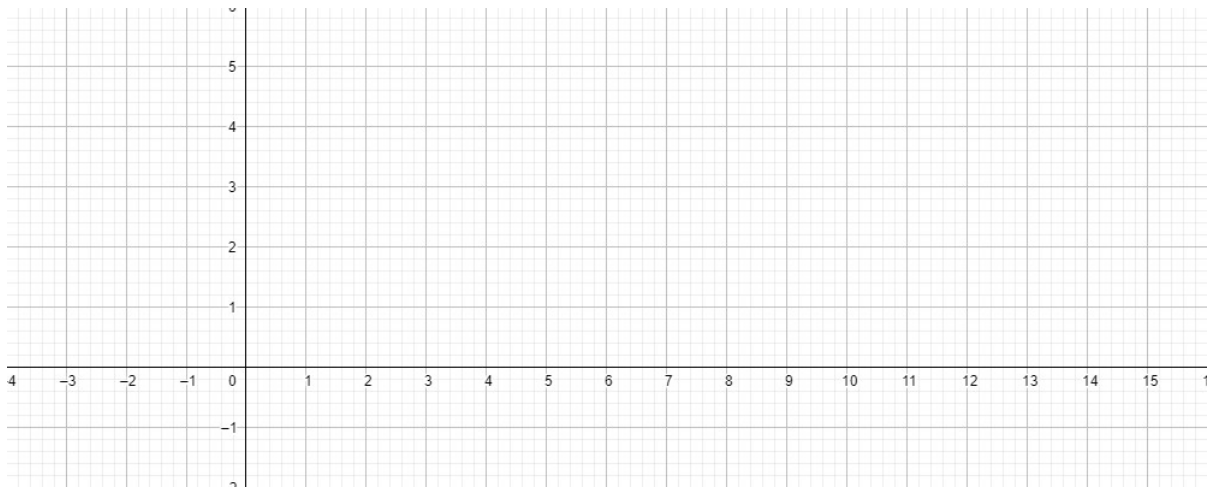
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

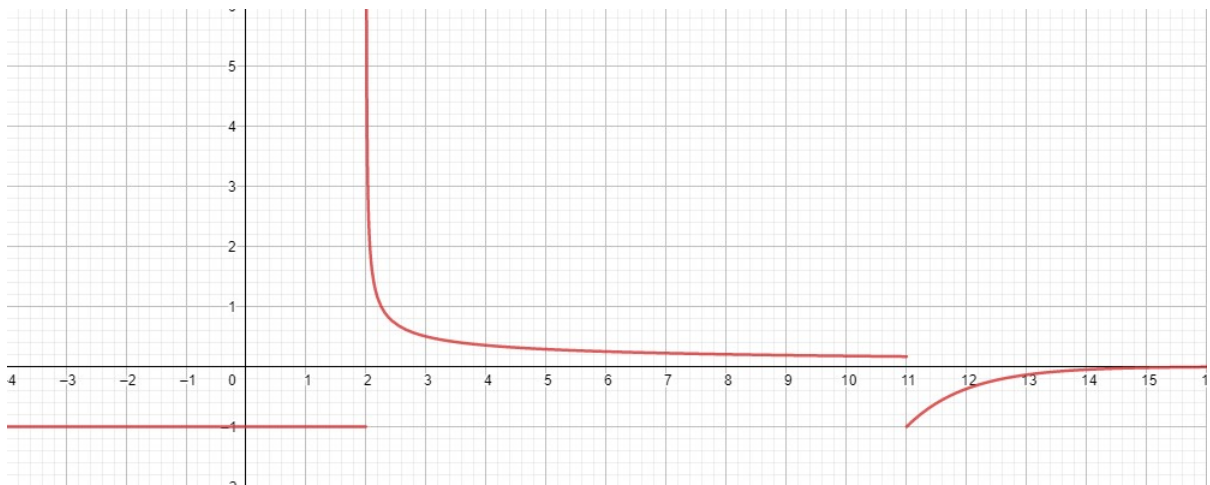
Esercizio 4 (5 punti). Data la seguente funzione



disegnarne la derivata



Soluzione:



Esercizio 5 (5 punti). Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.

(a) Tre vettori in \mathbb{R}^3 formano una base;

(b) Sia \mathbf{v} la somma dei vettori $(1, 1, 0)$ e $(2, 5, -1)$. La terna $\{\mathbf{v}, (1, 1, 0), (2, 5, -1)\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Soluzione:

(1)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) Il rango è 1, perché tutte le sottomatrici 2×2 hanno determinante nullo.

(3) La prima affermazione è falsa (devono essere anche indipendenti) mentre la seconda è vera per definizione: $(-1)\mathbf{v} + 1(1, 1, 0) + 1(2, 5, -1) = (0, 0, 0)$.

Esercizio 6 (6 punti). Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - ky + z = -1 \\ ky - z = 1 \\ kx + 4z = -1 \end{cases}$$

discuterne la compatibilità e calcolarne le eventuali soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Osservando che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4k$$

abbiamo che il sistema lineare dato ammette un'unica soluzione per ogni $k \neq 0$ che (con la regola di Cramer) è pari a:

$$\left(0, \frac{3}{4k}, -\frac{1}{4}\right)$$

Per $k = 0$, la matrice completa del sistema lineare dato diventa:

$$(A | b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

e avendosi $rg(A) = 2 \neq rg(A | b) = 3$, si conclude che il sistema lineare è incompatibile.