ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
23/02/2022

II APPELLO SESSIONE INVERNALE

Nome:	____________________
Cognome:	____________________
Matricola:	____________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Assumendo condizioni di laboratorio ideali, il numero di batteri in una coltura, al variare del tempo t (misurato in ore), è dato dalla legge

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

dove Q_0 è la popolazione di batteri presenti nella coltura al primo istante di osservazione. Supponiamo che nella coltura siano inizialmente presenti 10000 batteri, e che dopo due ore i batteri presenti diventino 60000.

(1) quanti saranno i batteri dopo 4 ore?
(2) qual è il tasso di crescita della popolazione di batteri dopo 4 ore?

Soluzione: Bisogna risolvere l'equazione esponenziale $60000 = 10000e^{kt}$ per trovare k. Si ottiene $k = 0.89$. Quindi,

(1) $Q(4) = 351632$,
(2) il tasso di crescita si ottiene calcolando $Q'(4) = 0.89 \cdot 10000 \cdot e^{4 \cdot 0{,}89} = 312952$. Quindi il tasso di crescita in $t = 4$ è di 312952 batteri all'ora.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{3x^2+2x-1}\right) + \log\left(\frac{3x+1}{6x}\right)$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione:

(1) $Dom\,(f) = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

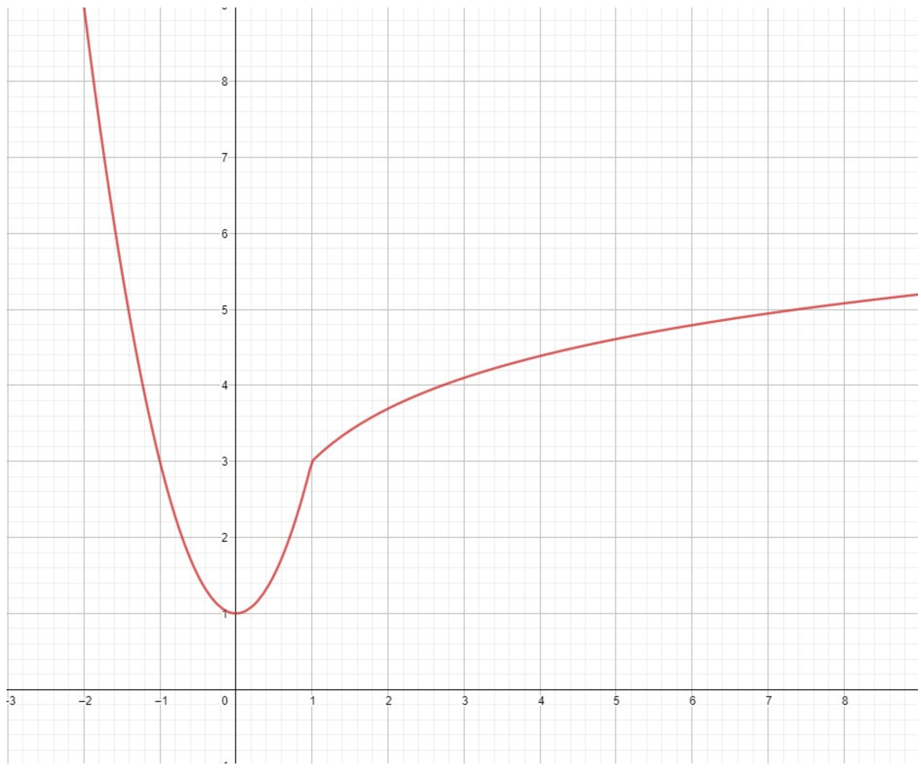
(2)
$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{3x^2+2x-1}\right)^2} \cdot \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x-1}} + \frac{-1}{x(3x+1)}$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & x \le 1 \\ \log(x)+3 & x > 1. \end{cases}$$

dopo averla disegnata, stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 3$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 + 1 = 3$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(x) + 3 = 3$.

(2) Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} 2(x + 1) = 4$$

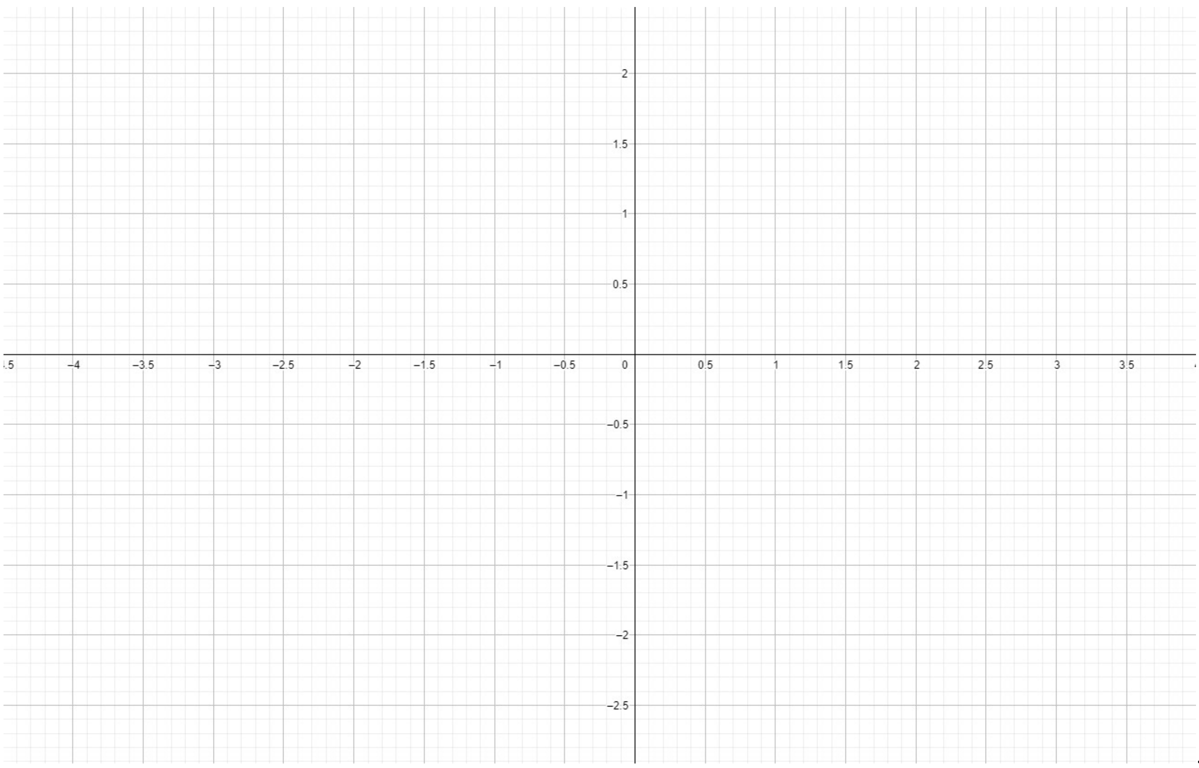
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)}{x - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(y + 1)}{y} = 1.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di funzione

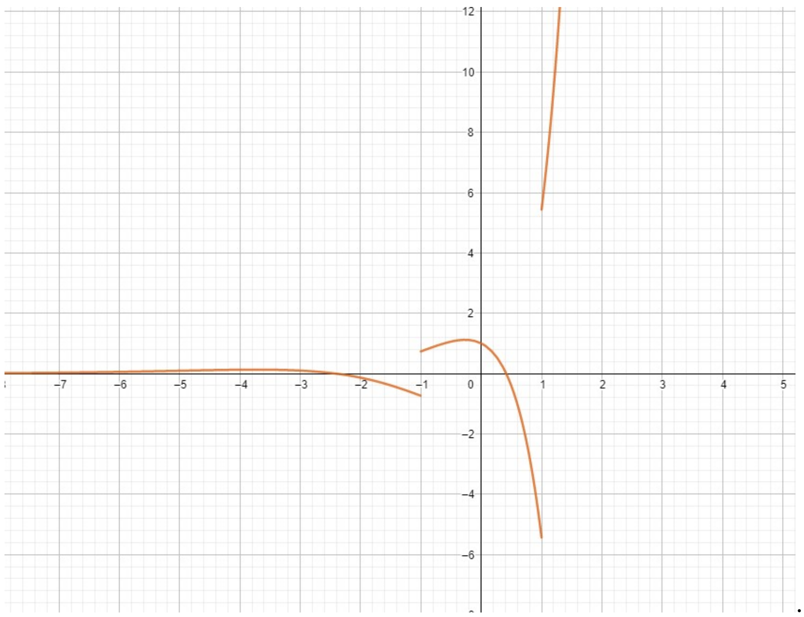
.

Disegnarne approssimativamente la sua derivata.



.

Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Stabilire se i vettori $\underline{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (2, -1, 0)$ e $\underline{v}_3 = (1, 1, 3)$ sono linearmente dipendenti.

Soluzione:

(1) La matrice $C = AB$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) La sottomatrice

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di D ha determinante -1, quindi diverso da 0. Perciò il rango è 3 (non può essere di più perchè la matrice D ha 3 righe).

(3) Il determinante della matrice ottenuta accostando i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ è 0. Perciò i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Soluzione alternativa: $\underline{v}_3$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, poiché $\underline{v}_3 = 3\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$. Perciò $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Soluzione alternativa: $3\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3$ è il vettore nullo. Poichè gli scalari 3, 2, -1 che appaiono in questa combinazione lineare non sono tutti nulli, i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio 6 (5 punti)**.** Risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ -x - 3y - 5z = -1 \\ -x + y + z = 0. \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema ammette un'unica soluzione: $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$, a cui si può arrivare con il metodo di Cramer oppure con il metodo di eliminazione di Gauss, come segue.

(1) (Metodo di Cramer) Il sistema scritto in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante -4. Poichè la matrice incompleta è quadrata con determinante diverso da 0 possiamo applicare il metodo di Cramer (senza dover eliminare né righe né colonne). Otteniamo

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = 0.$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

(2) (Metodo di Gauss) Il sistema scritto in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo la seconda riga con la somma tra la prima e la seconda riga, e sostituendo la terza riga con la somma tra la prima e la terza riga, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo la terza riga con la somma tra la seconda e la terza riga otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da qui ricaviamo i valori di z $(= \frac{1}{2})$, di y $(= \frac{2z}{-2} = -z = -\frac{1}{2})$, e di x $(= 1-y-3z = 1+\frac{1}{2}-\frac{3}{2} = 0)$.