ESAME DI METODI MATEMATICI PER LE SCIENZE AMBIENTALI

24 GENNAIO 2023

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e 30 minuti**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - x + 3}$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x + 3 \geq 0, \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha soluzione:

$$\sqrt{x+3} \geq x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x + 3 \geq x^2 - 6x + 9, \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x + 3 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ 1 \leq x \leq 6, \end{cases} \cup \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -3. \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$$

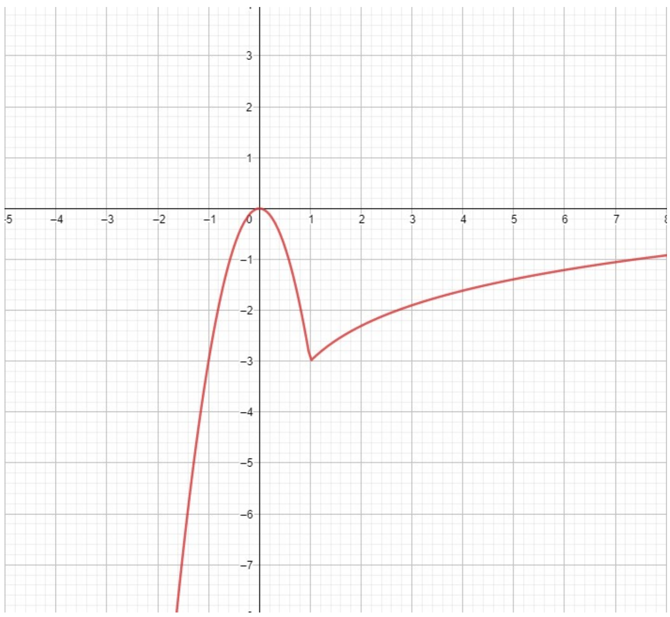
La seconda disequazione ha soluzione $x \geq -3$.
Quindi $D = [-3; 6]$.

Esercizio 2 (4 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & x \leq 1 \\ \log(x) - 3 & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = -3$ e che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -3x^2 = -3$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log(x) - 3 = -3$.
(2) Si ha che

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3x^2 + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)} = -6$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\log(x) - 3 + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\log(x)}{x - 1} = (\text{de L'Hopital}) = \lim 1^+ \frac{1}{x} = 1.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

Esercizio 3 (5 punti)**.** Classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x, y) = x^2 y - 2xy^2 + 6xy.$$

Soluzione: Il gradiente è dato da (f_x, f_y) con

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2y(x-y+3), \\ f_y(x,y) = x(x-4y+6). \end{cases}$$

Ponendolo uguale a $(0,0)$ si ottengono i punti critici $A=(0,0), B=(0,3), C=(-6,0), D=(-2,1)$. Considerando la matrice Hessiana che è data da:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2(x-2y+3) \\ 2(x-2y+3) & -4x \end{pmatrix},$$

si ha

$$\det H(0,0) = -36 \Longrightarrow A \text{ è un punto di sella.}$$
$$\det H(0,3) = -36 \Longrightarrow B \text{ è un punto di sella.}$$
$$\det H(-6,0) = -36 \Longrightarrow C \text{ è un punto di sella.}$$
$$\det H(-2,1) = 12, f_{xx}(-2,1) = 2 \Longrightarrow D \text{ è un punto di minimo.}$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' - \frac{y}{1-x} = \frac{1}{1+x}.$$

Soluzione: L'equazione è lineare, la cui soluzione è

$$y(x) = e^{\int \frac{1}{1-x}dx}\left(\int \frac{1}{1+x} e^{-\int \frac{1}{1-x}dx} dx + c\right) =$$
$$= e^{-\log|1-x|}\left(\int \frac{e^{\log|1-x|}}{1+x}\, dx + c\right) =$$
$$= \frac{1}{1-x}\left(\int \frac{1-x}{1+x} dx + c\right) = \frac{-x + 2\log|1+x| + c}{1-x}.$$

Esercizio 5 (5 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x-3} dx.$$

Soluzione: Si ha:

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{x+5}{(x+3)(x-1)} dx,$$

Scomponendo il fratti semplici si ha:

$$\frac{x+5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x + 3B - A}{(x+3)(x-1)}.$$

Per il principio di identità tra polinomi si ha

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3B-A=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

quindi il risultato è:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3} dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1} dx = -\frac{1}{2}\log|x-3| + \frac{3}{2}\log|x+1| + c.$$

Esercizio 6 (3 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.

(a) Se la somma di due vettori è il vettore nullo, questi sono linearmente dipendenti;
(b) Se due vettori sono linearmente dipendenti, la loro somma è il vettore nullo.

Soluzione:

(1)
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Il rango è 3, ottenuto dalla sottomatrice formata dalla ultime 3 colonne.
(3) La prima affermazione è vera mentre la seconda è falsa.

Esercizio 7 (5 punti)**.** Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare in $\mathbb{R}$ al variare del paramentro $k \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} -x + ky + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ kx + y - z = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Denotiamo con A la matrice incompleta
$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A è $k^2 + 3$, che è diverso da 0 per ogni $k \in \mathbb{R}$. Il sistema ammette sempre una unica soluzione, che è necessariamente quella banale.