ESAME DI MATEMATICA 1

24 GENNAIO 2023

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti)**.** La temperatura di una tazza di caffè al tempo t, misurato in minuti, è data dalla legge

$$T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Inizialmente, la temperatura del caffè è 90 gradi, e tre minuti dopo è scesa a 80 gradi. Dopo quanti minuti scenderà a 65 gradi?

Soluzione: Per prima cosa troviamo le costanti c e k. Per trovare c usiamo il dato iniziale: $90 = 20 + ce^{-k0} = 20 + c$, quindi $c = 90 - 20 = 70$.

Per trovare k usiamo il secondo dato: $80 = 20 + 70e^{-3k}$. Quindi si ricava

$$k = -\frac{1}{3} \log\left(\frac{60}{70}\right) = 0.05.$$

Infine, risolviamo l'esercizio imponendo l'equazione $65 = 20 + 70e^{-0.05t}$, dalla quale segue

$$t = -\frac{1}{0.05} \log\left(\frac{45}{70}\right) = 8.83$$

Quindi il caffè raggiunge la temperatura di 65 gradi dopo circa 9 minuti.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Determinare il dominio e la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+3} - x + 3}$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x + 3 \geq 0, \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha soluzione:

$$\sqrt{x+3} \geq x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x + 3 \geq x^2 - 6x + 9, \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x + 3 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x \geq 3, \\ 1 \leq x \leq 6, \end{cases} \cup \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -3. \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$$

La seconda disequazione ha soluzione $x \geq -3$.

Quindi $D = [-3; 6]$.

La derivata è

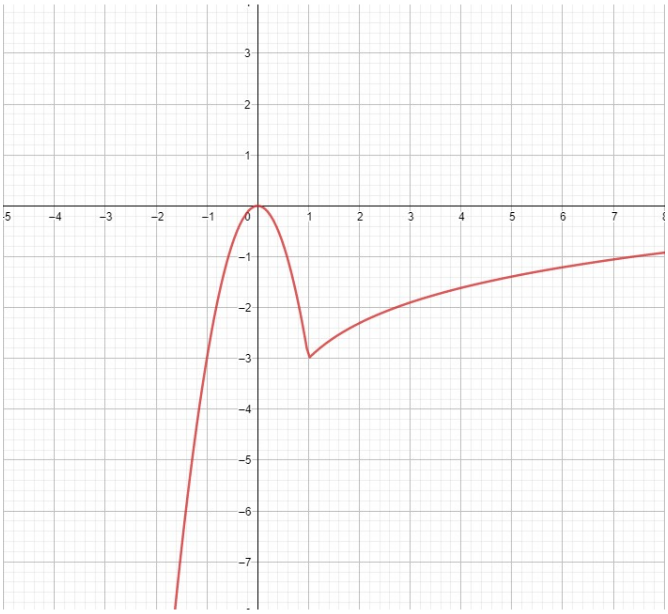
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x+3} - x + 3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} - 1\right)$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & x \leq 1 \\ \log(x) - 3 & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = -3$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -3x^2 = -3$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(x) - 3 = -3$.

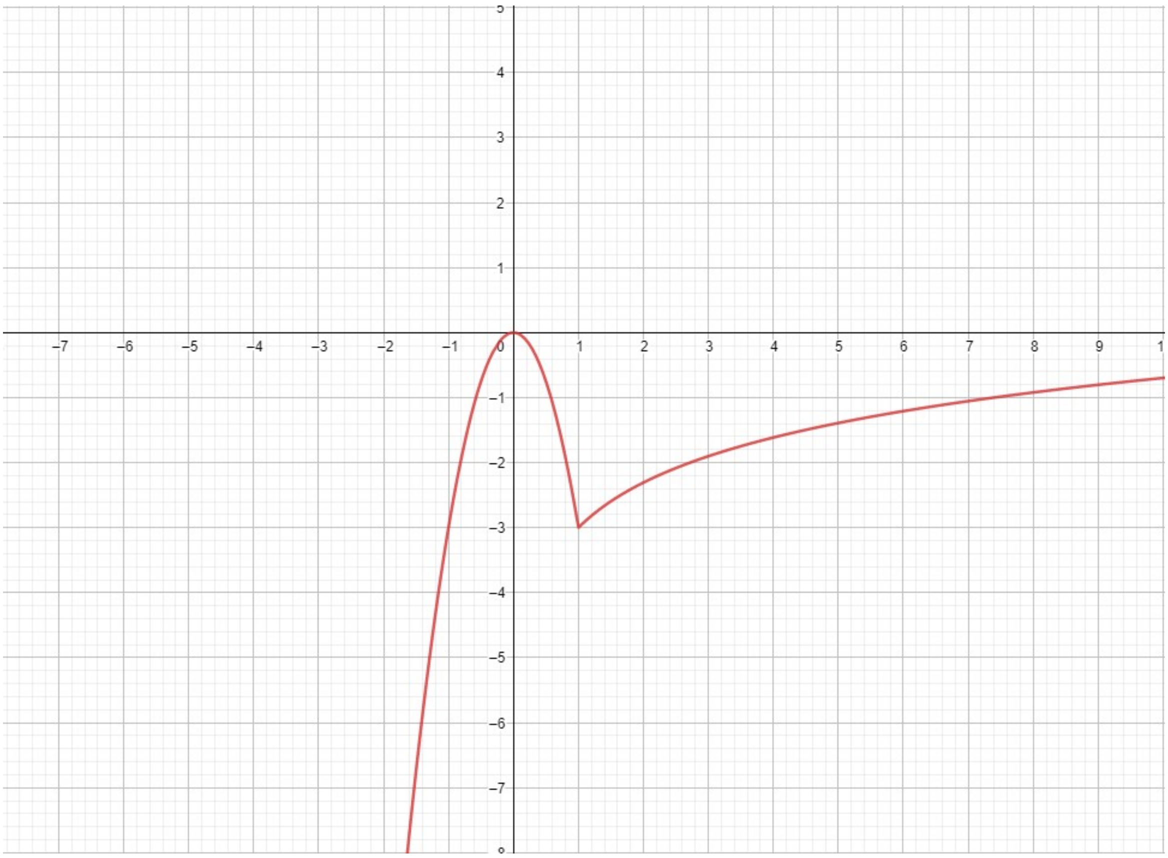
(2) Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3x^2+3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)} = -6$$

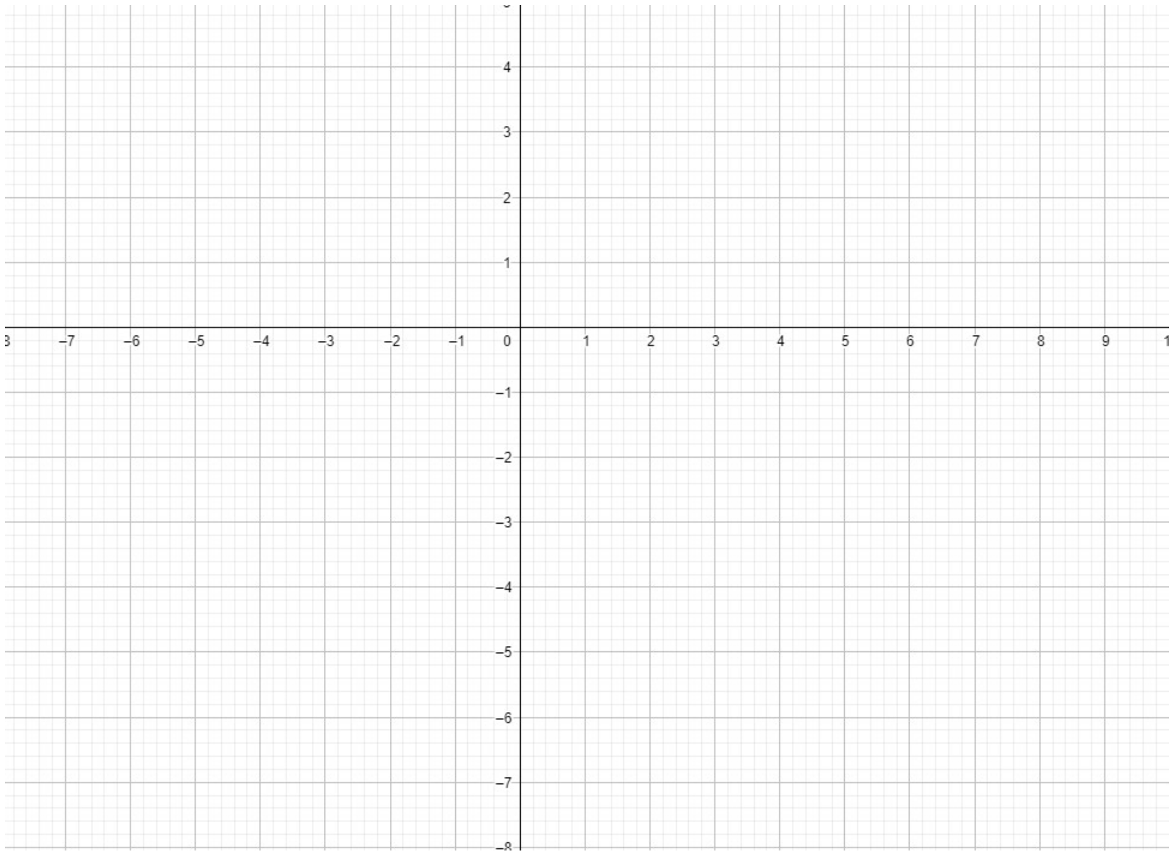
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)-3+3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)}{x-1} = (\text{de L'Hopital}) = \lim 1^+ \frac{1}{x} = 1.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

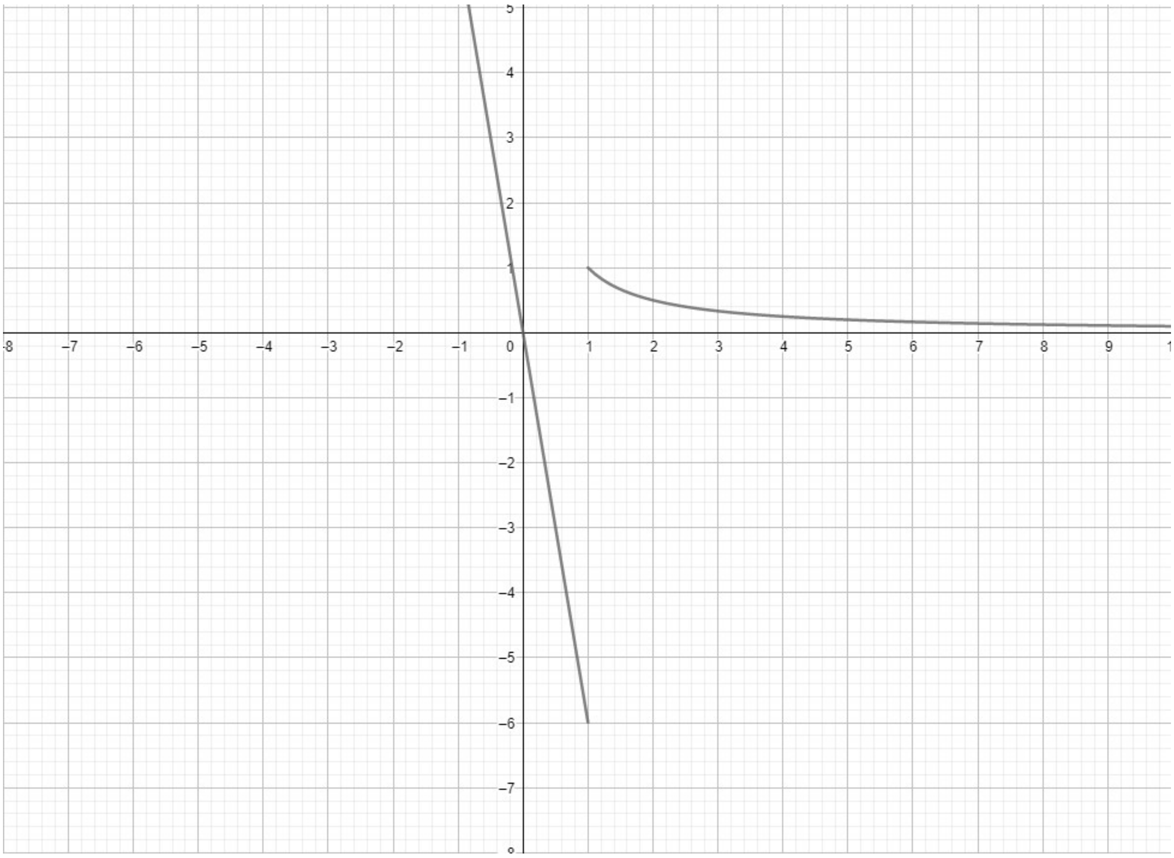
Esercizio 4 (5 punti)**.** Data la seguente funzione



disegnarne la derivata



Soluzione:



Esercizio 5 (5 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
   (a) Se la somma di due vettori è il vettore nullo, questi sono linearmente dipendenti;
   (b) Se due vettori sono linearmente dipendenti, la loro somma è il vettore nullo.

Soluzione:

(1)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Il rango è 3, ottenuto dalla sottomatrice formata dalla ultime 3 colonne.

(3) La prima affermazione è vera mentre la seconda è falsa.

Esercizio 6 (6 punti)**.** Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare in $\mathbb{R}$ al variare del paramentro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -x + ky + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ kx + y - z = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Denotiamo con A la matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A è $k^2 + 3$, che è diverso da 0 per ogni $k \in \mathbb{R}$. Il sistema ammette sempre una unica soluzione, che è necessariamente quella banale.