ESAME DI MATEMATICA 1

24 LUGLIO 2023

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (3 punti)**.** Scegliendo a piacere dominio e codominio, fornire un esempio di

(1) Una funzione che è iniettiva ma non suriettiva;
(2) Una funzione che è suriettiva ma non iniettiva;
(3) Una funzione che è biettiva.

Soluzione:

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$.
(2) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Determinare il campo di esistenza e la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{3x^2+x+1}}{\log(x^2+1)}\right).$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2+x+1 \geq 0 \\ \log(x^2+1) \neq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione $\mathbb{R}$, poichè si tratta di una equazione di secondo grado con $\Delta < 0$ e coefficiente direttore positivo.

La seconda disequazione si risolve come segue:

$$\log(x^2+1) \neq 0 \iff x^2+1 \neq 1 \iff x^2 \neq 0 \iff x \neq 0.$$

Quindi $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
La derivata è

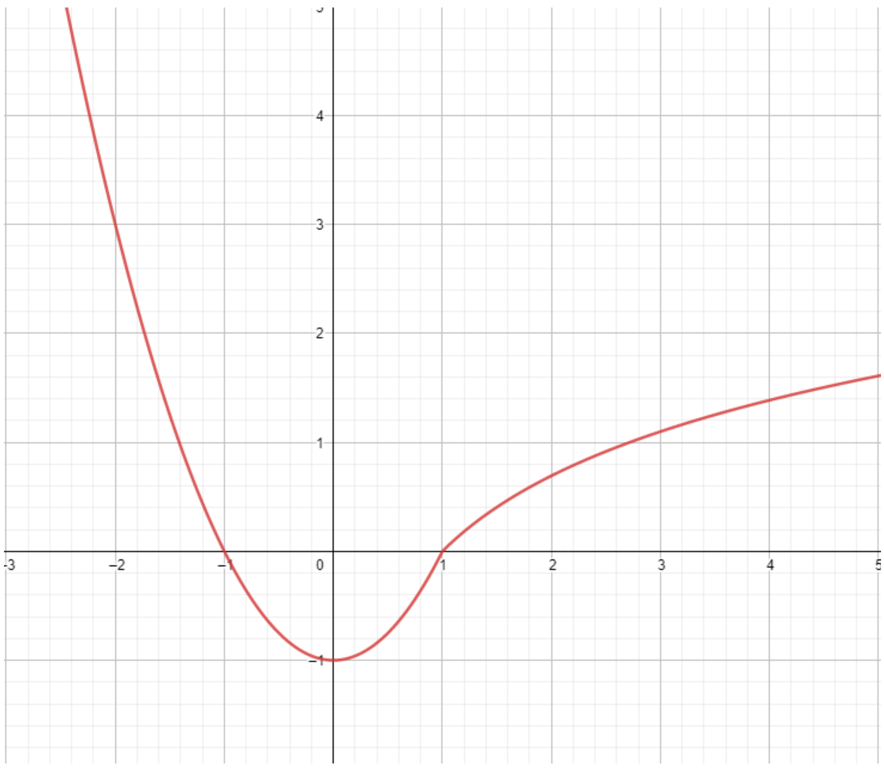
$$f'(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3x^2+x+1}}{\log(x^2+1)}\right) \cdot \frac{\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x+1}} \cdot \log(x^2+1) - \sqrt{3x^2+x+1} \cdot \frac{2x}{x^2+1}}{\left(\log(x^2+1)\right)^2}.$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \leq 1 \\ \log(x) & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - 1 = 0$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(x) = 0$.

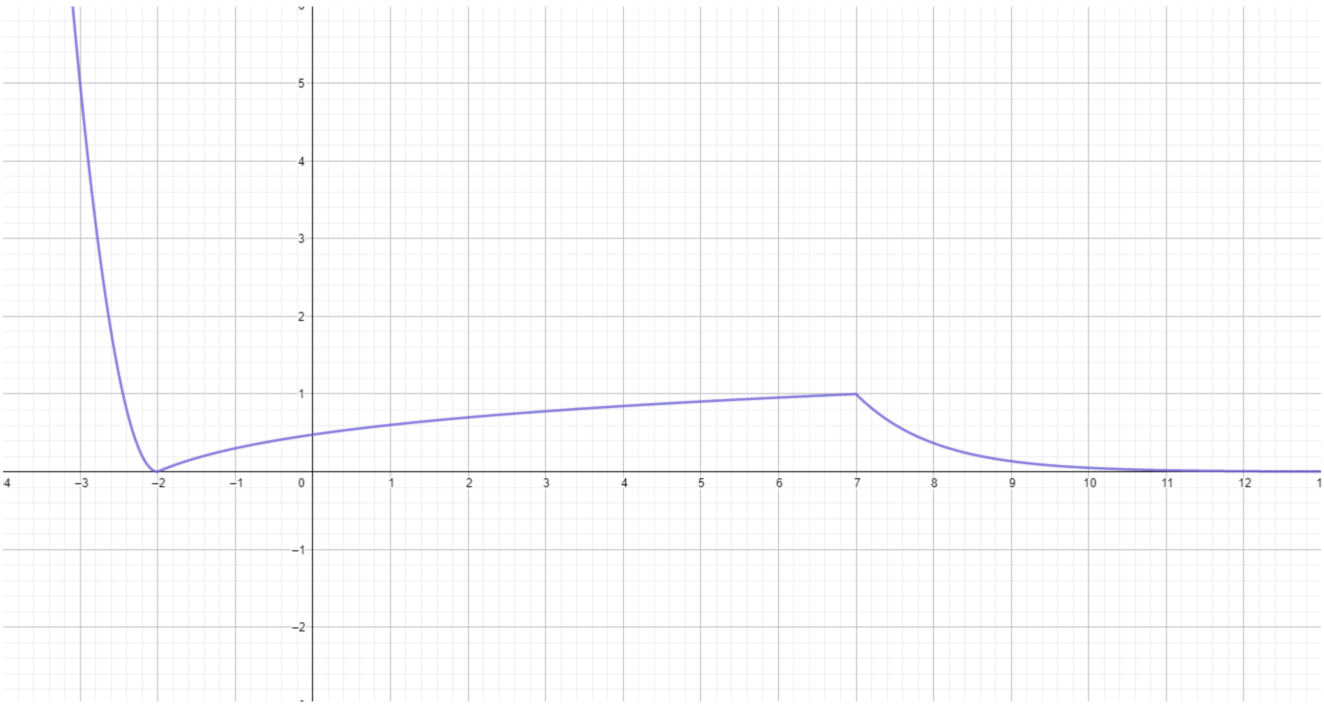
(2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

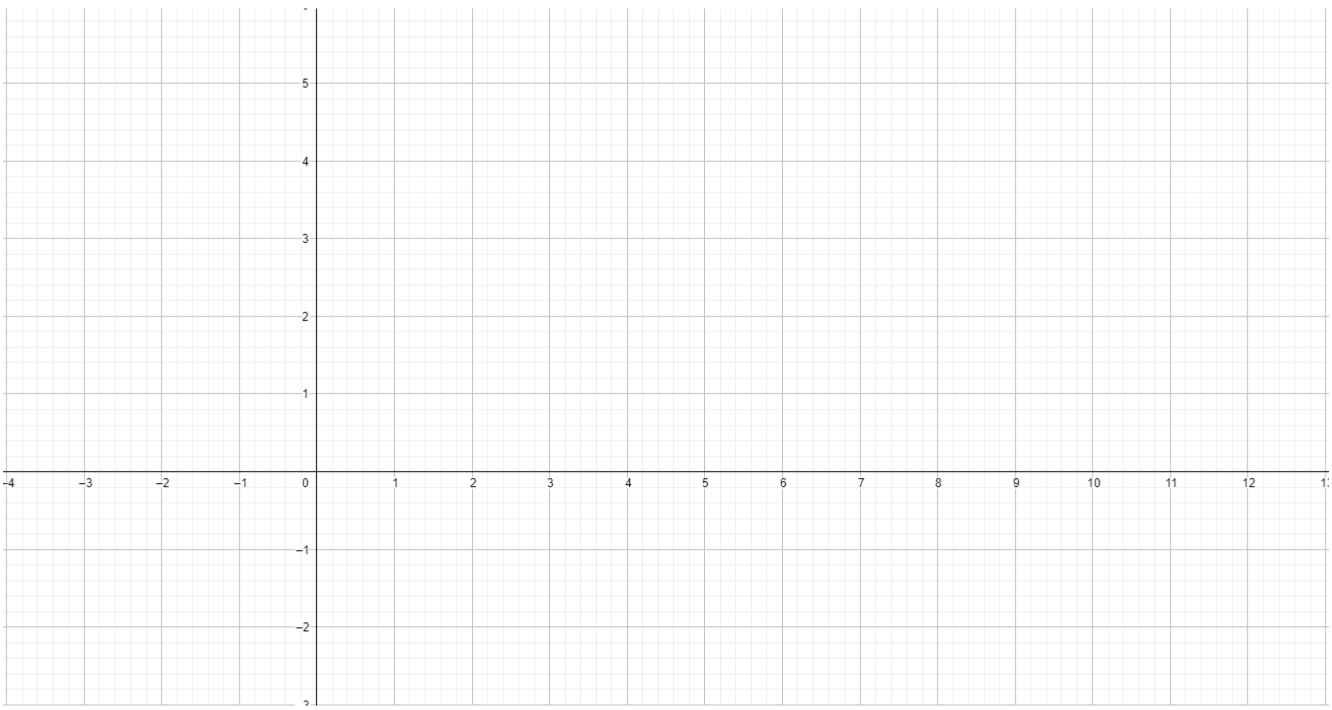
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

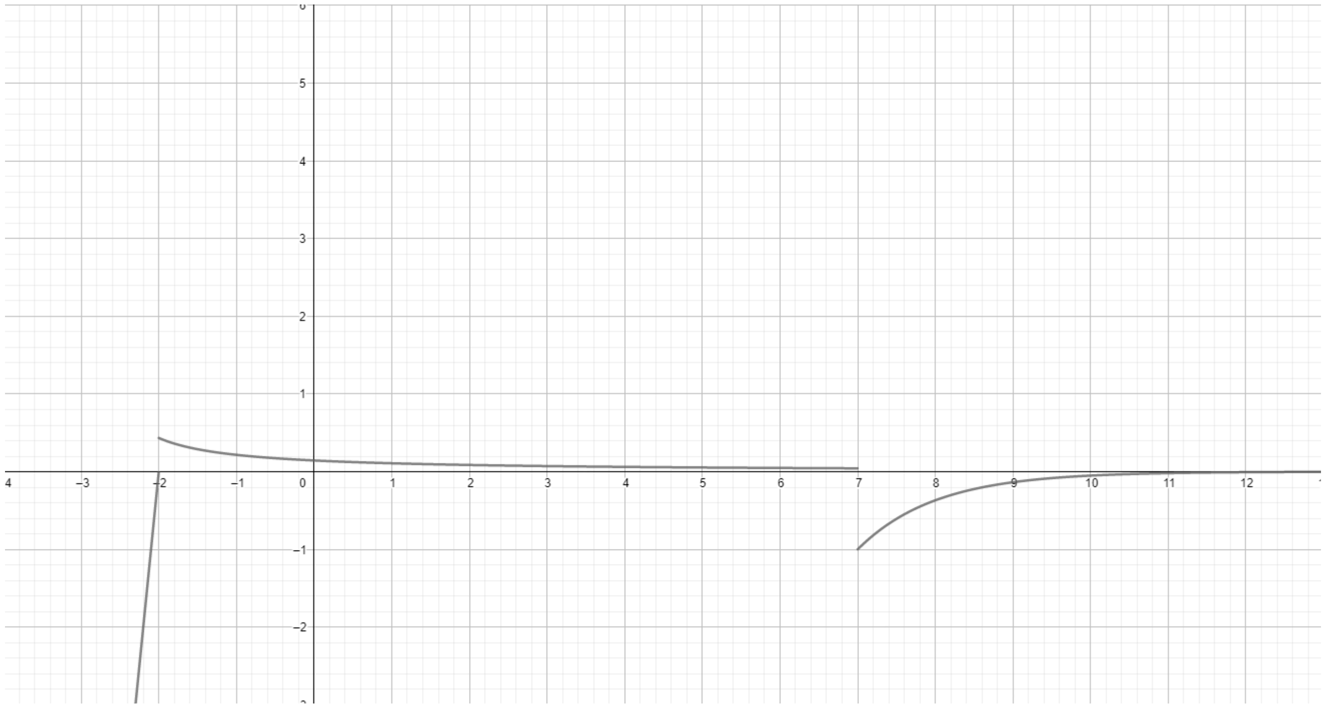
Esercizio 4 (5 punti)**.** Data la seguente funzione



disegnarne la derivata



Soluzione:



Esercizio 5 (5 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
calcolare, se possibile, $C = AB$.

(2) Trovare il rango della seguente matrice, motivando la risposta.
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
  (a) I vettori $(-1, 2, 0)$, $(1, -2, 0)$ e $(0, 0, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$;
  (b) Se due vettori sono linearmente dipendenti la loro somma è il vettore nullo.

Soluzione:

(1)
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

(2) Il rango è 2.

(3) La prima affermazione è falsa (è un insieme formato da vettori linearmente dipendenti). La seconda affermazione è falsa (ad esempio, $(1, 2)$ e $(2, 4)$ la contraddicono).

Esercizio 6 (6 punti)**.** Usando le tecniche viste a lezione, dato il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -2x - y + 3z = 1 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$
stabilire se il sistema ammette soluzioni ed eventualmente calcolarle.

Soluzione: La matrice del sistema è
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ed il suo rango è 3. Ha determinate pari a -2. Le soluzioni trovate usando la regola di Cramer saranno $x = 1/2$, $y = -1/2$, $z = 1/2$.