ESAME DI METODI MATEMATICI PER LE SCIENZE AMBIENTALI

24 LUGLIO 2023

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI, leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e 30 minuti**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi**. I fogli extra per la brutta copia non verranno considerati.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.**
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{3x^2 + x + 1}}{\log(x^2 + 1)}\right).$$

Soluzione: Per determinare il campo di esistenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + x + 1 \geq 0 \\ \log(x^2 + 1) \neq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzione $\mathbb{R}$, poichè si tratta di una equazione di secondo grado con $\Delta < 0$ e coefficiente direttore positivo.

La seconda disequazione si risolve come segue:

$$\log(x^2 + 1) \neq 0 \iff x^2 + 1 \neq 1 \iff x^2 \neq 0 \iff x \neq 0.$$

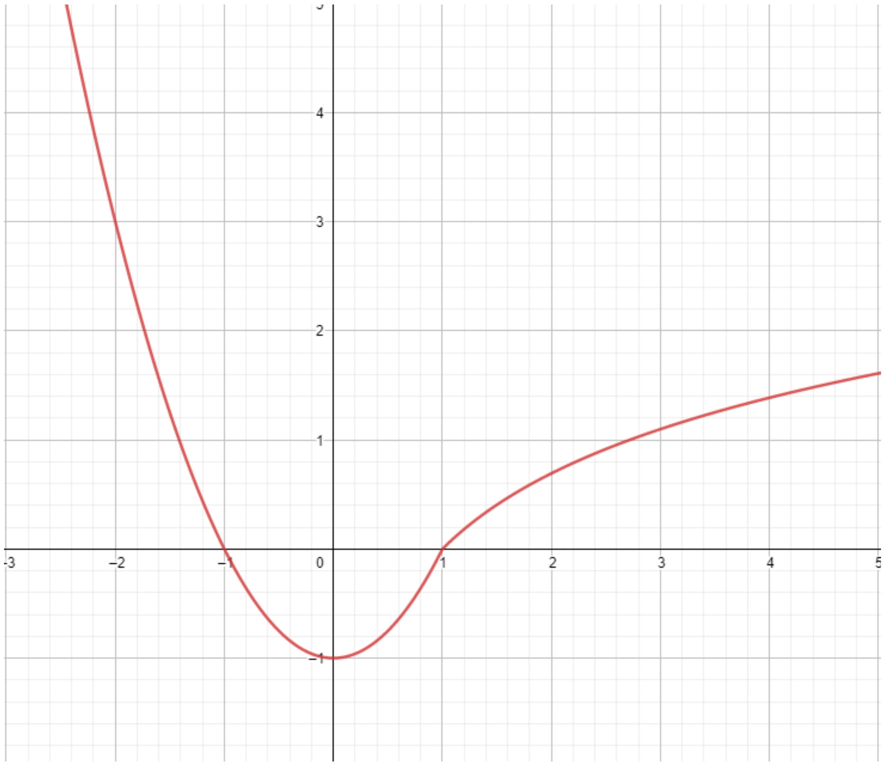
Quindi $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 2 (4 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ \log(x) & x > 1. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - 1 = 0$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(x) = 0$.

(2) Per la derivabilità, si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Quindi f è continua ma non derivabile in 1.

Esercizio 3 (5 punti)**.** Classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x, y) = 9x^2 + 6xy^2 - 6x.$$

Soluzione: Il gradiente è dato da (f_x, f_y) con

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 18x + 6y^2 - 6, \\ f_y(x,y) = 12xy. \end{cases}$$

Ponendolo uguale a $(0,0)$, si ottengono i punti critici $A = \left(\frac{1}{3}, 0\right), B = (0,1), C = (0,-1)$. La matrice Hessiana è data da:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 18 & 12y \\ 12y & 12x \end{pmatrix},$$

e, di conseguenza, $\det H(x,y) = 216x - 144y^2$. Segue che
$\det H\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 72$, $f_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 18$, pertanto A è un punto di minimo relativo, con $f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = -1$.
$\det H(0,1) = \det H(0,-1) = -144$, pertanto B e C sono punti di sella con $f(0, \pm 1) = 0$.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Calcolare il seguente integrale:

$$\int (x-4)\, e^{2x} dx,$$

Soluzione: Si utilizza la formula di integrazione per parti, quindi si ha:

$$\int (x-4)\, e^{2x} dx = \frac{1}{2}\left[(x-4)\, e^{2x} - \int e^{2x} dx\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(x-4)\, e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}\right] + c.$$

Esercizio 5 (5 punti)**.** Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 2y' = xe^x.$$

Soluzione: Risolviamo prima l'omogenea associata. Il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. L'integrale generale dell'omogenea è:

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{2x}.$$

L'integrale particolare è della forma:

$$y_p(x) = (Ax + B)\, e^x.$$

Imponendo che $y_p(x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale assegnata, otteniamo:

$$A = -1, \quad B = 0.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - xe^x.$$

Esercizio 6 (3 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile, $C = AB$.

(2) Trovare il <u>rango</u> della seguente matrice, motivando la risposta.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando ogni risposta.
 (a) I vettori $(-1,2,0)$, $(1,-2,0)$ e $(0,0,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$;
 (b) Se due vettori sono linearmente dipendenti la loro somma è il vettore nullo.

Soluzione:

(1)
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

(2) Il rango è 2.
(3) La prima affermazione è falsa (è un insieme formato da vettori linearmente dipendenti). La seconda affermazione è falsa (ad esempio, $(1,2)$ e $(2,4)$ la contraddicono).

Esercizio 7 (5 punti)**.** Usando le tecniche viste a lezione, dato il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -2x - y + 3z = 1 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$
stabilire se il sistema ammette soluzioni ed eventualmente calcolarle.

Soluzione: La matrice del sistema è
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
ed il suo rango è 3. Ha determinate pari a -2. Le soluzioni trovate usando la regola di Cramer saranno $x = 1/2$, $y = -1/2$, $z = 1/2$.