ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
25/07/2022

II APPELLO SESSIONE ESTIVA

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Un esperimento suggerisce che la risposta $R(x)$ del cuore di una rana all'iniezione di x unità di acetilcolina (in percentuale del massimo effetto possibile del farmaco) possa essere approssimata dalla funzione razionale

$$R(x) = \frac{100x}{b+x}, \quad x \geq 0$$

dove b è una costante positiva che dipende dalla particolare rana.

(1) Se una concentrazione di 40 unità di acetilcolina produce una risposta del 50% per una certa rana, trovare il parametro b relativo alla rana.
(2) Trovare la risposta del muscolo cardiaco della stessa rana del punto precedente quando 60 unità di acetilcolina vengono somministrati.

Soluzione:

(1) Imponendo i parametri, si ha

$$50 = \frac{100 \cdot 40}{b+40} \Rightarrow b = -40 + \frac{4000}{50} = 40$$

(2) Si ha

$$R(60) = \frac{100 \cdot 60}{60+40} = \frac{6000}{100} = 60\%.$$

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x^2+3x+1}{3x-1}\right) + e^{\sin(3x+2)}$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione: L'unica condizione di esistenza è

$$\frac{2x^2+3x+1}{3x-1} > 0,$$

Quindi $dom(f) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Mentre

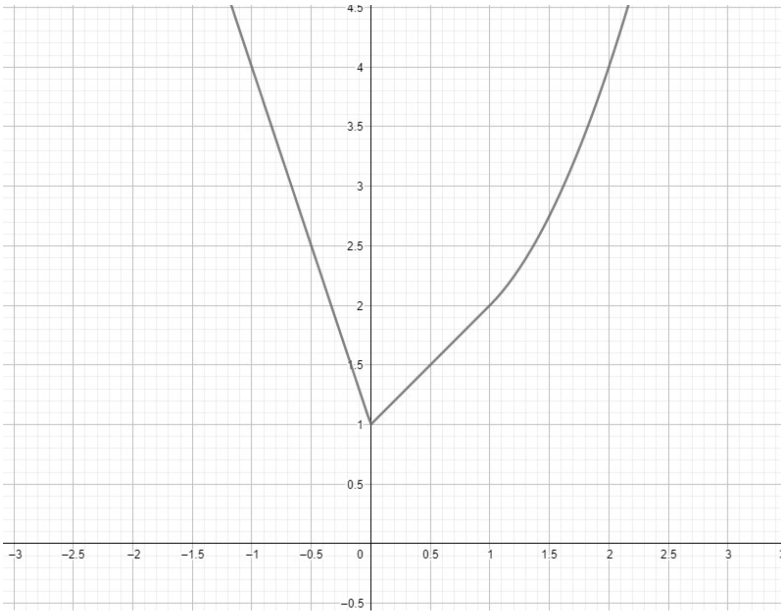
$$f'(x) = \frac{3x-1}{2x^2+3x+1} \cdot \frac{6x^2-4x-6}{(3x-1)^2} + 3 \cdot \cos(3x+2) \cdot e^{\sin(3x+2)}.$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1 & x \leq 0 \\ x+1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x = 0$ e $x = 1$.

Soluzione:



(1) Per la continuità:
- Notiamo che $f(0) = 1$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -3x+1 = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1$, quindi f è continua in $x = 0$.
- Notiamo che $f(1) = 2$ e che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - x + 2 = 2$, quindi f è continua in $x = 1$.

(2) Per la derivabilità:
- In $x = 0$:

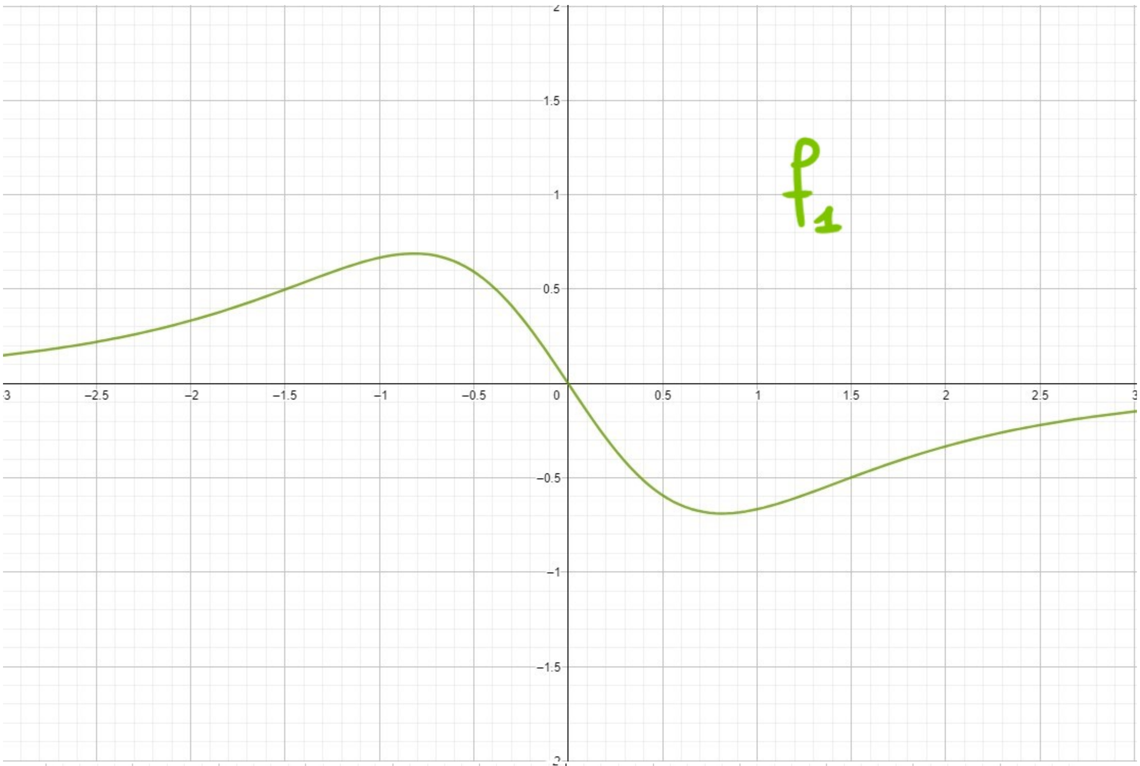
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} -3 = -3$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

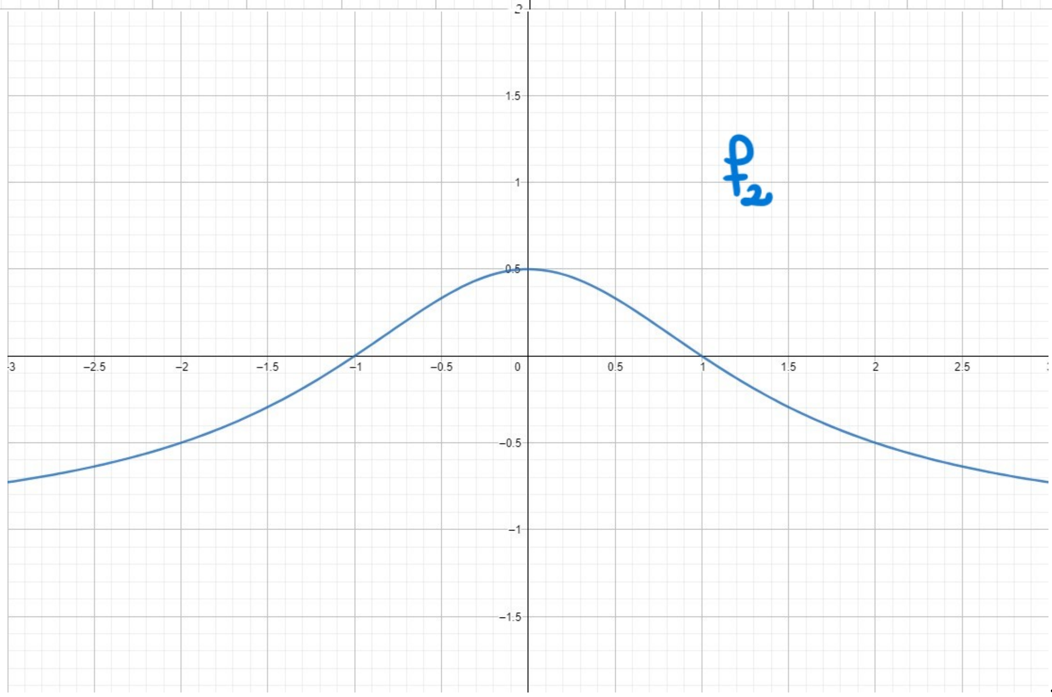
- In $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x+2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} x = 1$$

Quindi f non è derivabile in 0 ma è derivabile in 1.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Le due funzioni in figura sono tali che una delle due è la derivata dell'altra. Individuare **motivando la risposta** quale delle due è la funzione di partenza e quale la sua derivata.





Soluzione: Per esclusione, f_2 non può essere la derivata di f_1 perchè f_2 è negativa tra $-\infty$ e -1, mentre f_1 è crescente in quel tratto.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il rango della matrice

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Stabilire se il vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione:

(1) La matrice $C = AB$ è

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) La sottomatrice

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di D ha determinante pari a -2, quindi diverso da 0. Il determinante di D è 0, e D è l'unico orlato 3×3 di E. Quindi, per il teorema degli orlati, il rango di D è 2.

(3) La risposta è no. Infatti, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ottenuta accostando i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v_2}$ ha determinante 10, quindi diverso da 0. Perciò, i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v_2}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare, sono linearmente indipendenti, e questo implica che $\mathbf{u}$ non sia combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v_2}$.

(Alternativamente, si può mostrare che il rango della matrice ottenuta accostando $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ è diverso dal rango della matrice ottenuta accostando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ (il primo rango è 2, mentre il secondo è 3), e da ciò dedurre che $\mathbf{u}$ non è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$) e $\mathbf{v}_2$.)

Esercizio 6 (5 punti)**.** Stabilire per quali valori di k il sistema ammette almeno una soluzione e per quali valori di k ammette infinite soluzioni.

$$\begin{cases} 2x + y + (k^2 - 4)z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema è omogeneo, quindi ammette sempre almeno una soluzione ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$).

La matrice associata al sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k^2 - 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è $7k^2 - 7$. Il determinante di A è 0 se e solo se $k = 1$ o $k = -1$; in tali casi il rango di A è minore o uguale a 2 (in effetti è 2, ma non serve stabilirlo), altrimenti è 3. Perciò, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette esattamente una soluzione quando k è diverso sia da 1 che da -1, e ne ammette infinite quando k è uguale a 1 oppure a -1.