ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
27/01/2022

I APPELLO SESSIONE INVERNALE

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Assumendo la temperatura costante, la pressione atmosferica ad una altitudine h è data da

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{k}}$$

dove p_0 è la pressione al livello del mare, k è una costante e h è misurato in km. Se la pressione al livello del mare è 870 hPa e quella a 500 metri di altitudine è 821 hPa, calcolare il valore di k.

Soluzione: Bisogna risolvere l'equazione esponenziale $821 = 870e^{-\frac{0.5}{k}}$. Si ottiene $e^{-\frac{0.5}{k}} = 0.94$, da cui $-\frac{0.5}{k} = \log(0.94)$ e $k = 8.3$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin(2x+1)} + \log(x^2+x+1),$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione:

(1) $Dom\,(f) = \{x \in [-\frac{1}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi] \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

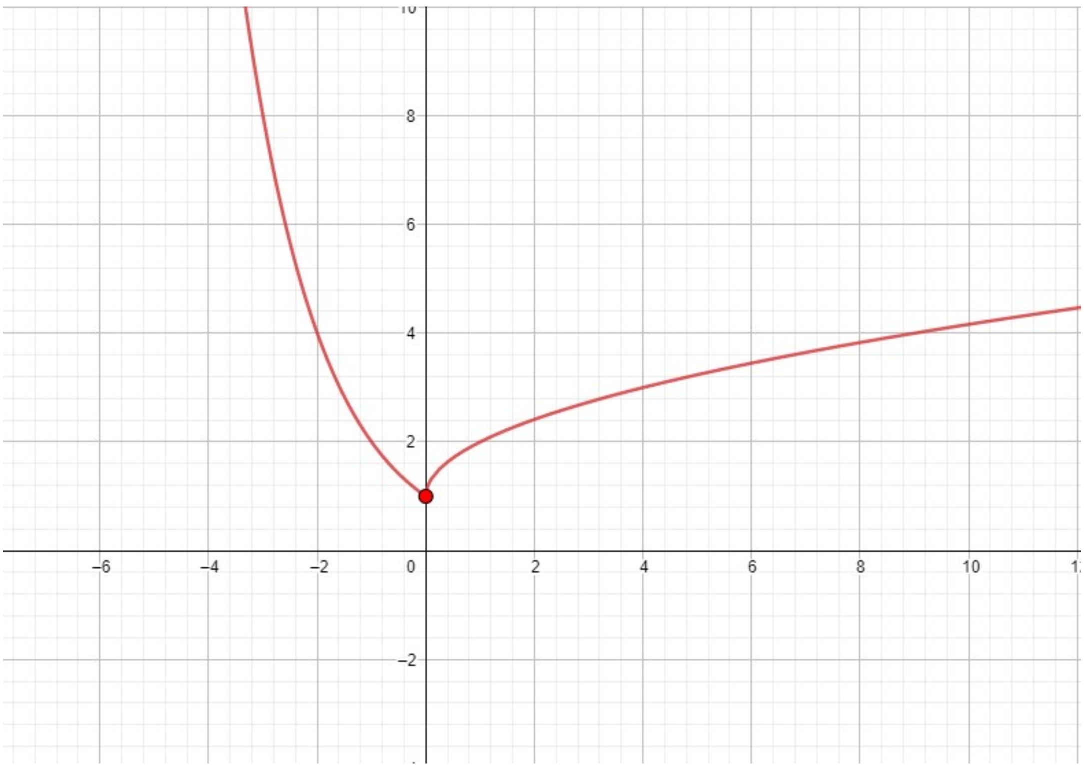
(2)
$$f'(x) = \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{\sin(2x+1)}} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & x \le 0 \\ \sqrt{x}+1 & x > 0. \end{cases}$$

dopo averla disegnata, stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 0$.

Soluzione:



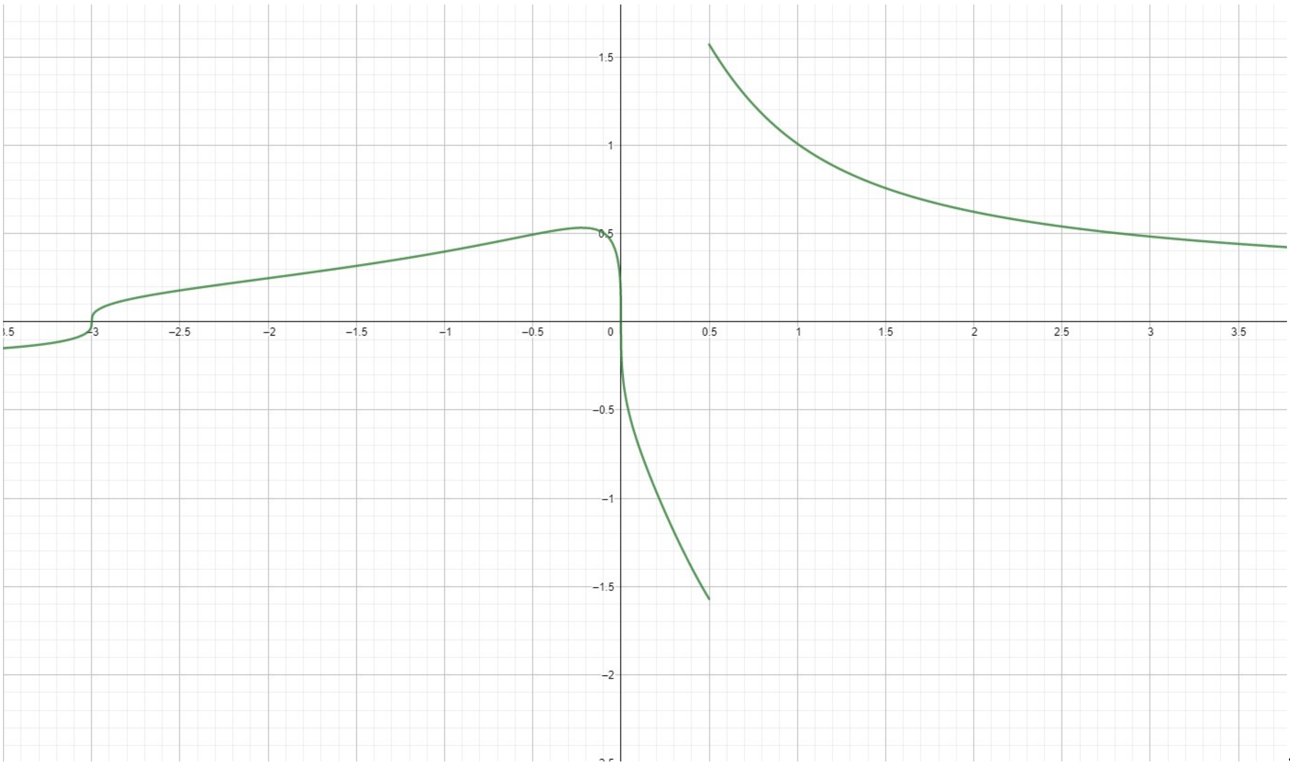
(1) Per la continuità, notiamo che $f(0) = 1$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}+1 = 1$.

(2) Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}{x} = \log\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

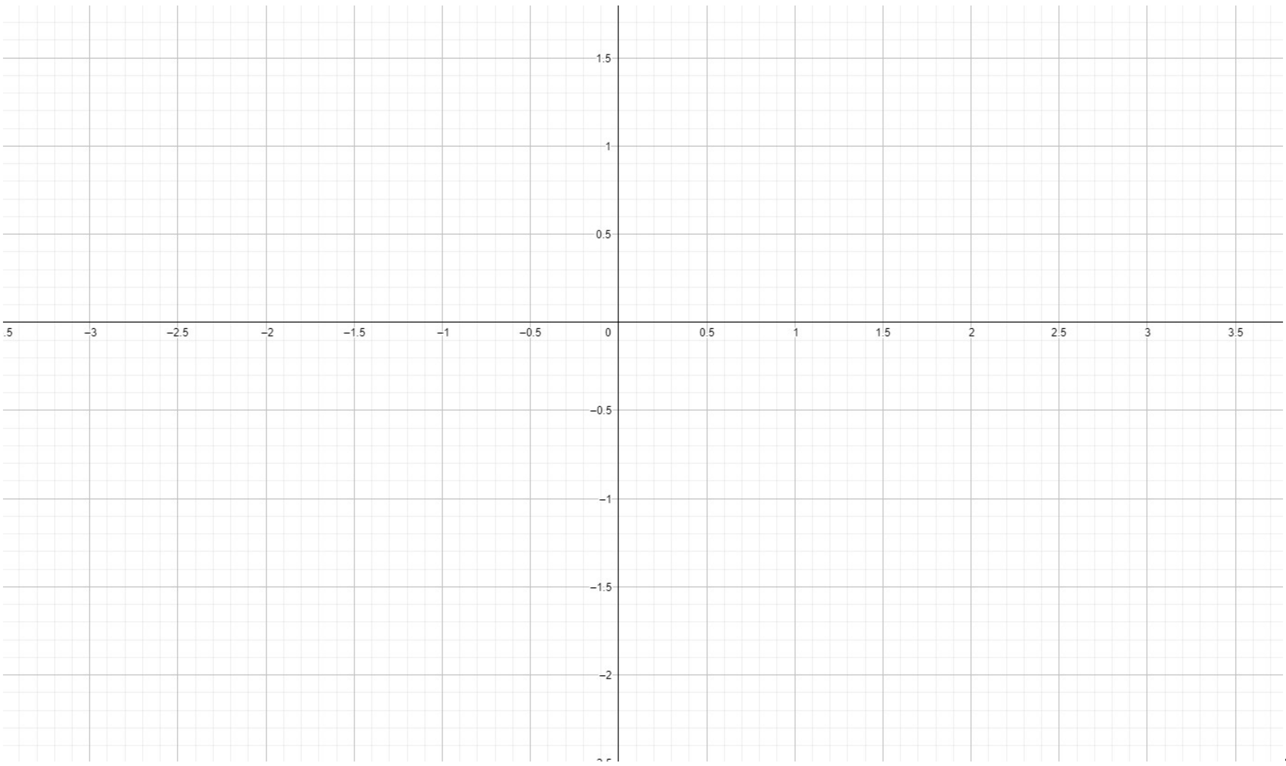
Quindi f è continua ma non derivabile in 0.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di funzione



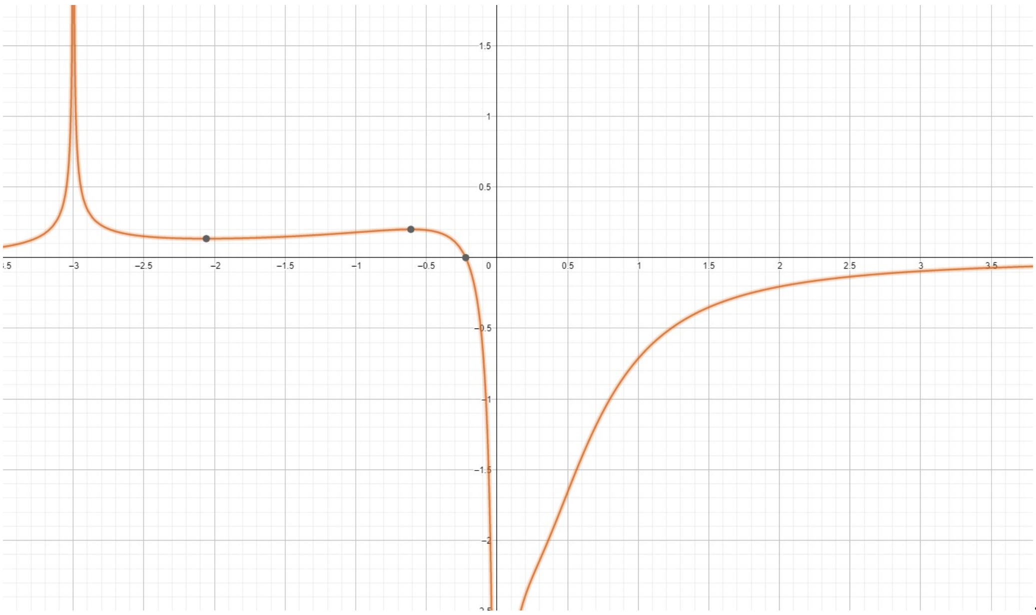
.

Disegnarne approssimativamente la sua derivata.



.

Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Stabilire se il vettore $\underline{u} = (2, 3, -1)$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1 = (0, -2, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 4, -3)$ e $\underline{v}_3 = (1, -2, -1)$.

(2) Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$
calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango della matrice
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

(1) Il determinante della matrice ottenuta accostando i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ è -2, quindi diverso da 0. Perciò, i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$, e quindi ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$. In particolare, $(2, 3, -1)$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

Come soluzione alternativa: dal fatto che la matrice A ottenuta accostando i vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ ha determinante diverso da 0 si deduce che il rango di A è 3 e quindi anche il rango della matrice ottenuta accostando ad A il vettore $\underline{u}$ ha rango 3 (è almeno 3 perchè contiene A come sottomatrice, e non può essere di più perché il rango è minore o uguale del massimo tra il numero di righe e eil numero di colonne). Poichè il rango delle due matrici è uguale, $\underline{u}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

(2) La matrice $C = AB$ è
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) La sottomatrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
di D ha determinante -2, quindi diverso da 0. Il determinante di D è 0, e D è l'unico orlato 3×3 di B. Quindi, per il teorema degli orlati, il rango di D è 2.

Esercizio 6 (5 punti)**.** Discutere il numero di soluzioni del seguente sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} (k-1)x + ky = 0 \\ y + 2z = 0 \\ (k-1)x + y - kz = 0. \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema scritto in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} k-1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k-1 & 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni k, il sistema è omogeneo e quindi esiste almeno una soluzione ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) (equivalentemente, per il teorema di Rouché-Capelli, il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa $(A \mid \underline{0})$). Il determinante della matrice incompleta A è $k^2 - 3k + 2$, che è uguale a 0 se e solo se $k = 1$ o $k = 2$. Poiché il rango di una matrice $n \times n$ è n se e solo se il suo determinante non è nullo, il rango della matrice A è 3 se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$. Si hanno i seguenti casi:

- se $k \neq 1$ e $k \neq 2$, allora
$$3 = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \underline{0}) = \text{numero di incognite},$$
e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha un'unica soluzione ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$);
- se $k = 1$ o $k = 2$, allora
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \underline{0}) \neq 3 = \text{numero di incognite},$$
e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha infinite soluzioni.