ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
13/06/2022

I APPELLO SESSIONE ESTIVA

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora dall'inizio.

(4) Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile utilizzare **esclusivamente** il formulario disponibile sul mio sito web, allegato alla prova.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** La temperatura di una tazza di caffè al tempo t, misurato in minuti, è data dalla legge

$$T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Inizialmente, la temperatura del caffè è 90 gradi, e tre minuti dopo è scesa a 80 gradi. Dopo quanti minuti scenderà a 65 gradi?

Soluzione: Per prima cosa troviamo le costanti c e k. Per trovare c usiamo il dato iniziale: $90 = 20 + ce^{-k0} = 20 + c$, quindi $c = 90 - 20 = 70$.

Per trovare k usiamo il secondo dato: $80 = 20 + 70e^{-3k}$. Quindi si ricava

$$k = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{60}{70}\right) = 0.05.$$

Infine, risolviamo l'esercizio imponendo l'equazione $65 = 20 + 70e^{-0.05t}$, dalla quale segue

$$t = -\frac{1}{0.05}\log\left(\frac{45}{70}\right) = 8.83$$

Quindi il caffè raggiunge la temperatura di 65 gradi dopo circa 9 minuti.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \log(\sin(2x)) + \sqrt{\frac{1-x}{2x-1}}$$

calcolare il dominio e la derivata di $f(x)$.

Soluzione: Le condizioni da mettere a sistema sono

$$(1)\,\sin(2x) > 0$$
$$(2)\frac{1-x}{2x-1} \geq 0.$$

Si ricava quindi,

$$(1)\,\sin(2x) > 0 \Leftrightarrow 0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi \Leftrightarrow 0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$(2)\frac{1-x}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1.$$

Quindi $dom(f) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Notiamo che la soluzione di (2) è completamente contenuta nella soluzione di (1): in particolare $\left(\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, mentre

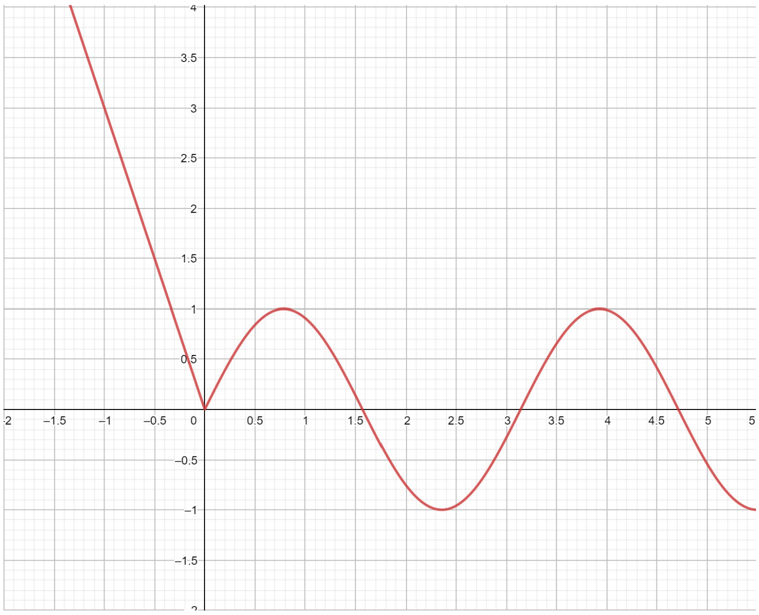
$$f'(x) = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{2x-1}}} \cdot \frac{-1(2x-1) - 2(1-x)}{(2x-1)^2}.$$

Esercizio 3 (5 punti)**.** Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x & x \leq 0 \\ \sin(2x) & x > 0. \end{cases}$$

disegnarla e stabilire, **motivando ogni risposta**, se f è continua e derivabile in $x_0 = 0$.

Soluzione:



(1) Per la continuità, notiamo che $f(0) = 0$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -3x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(2x) = 0$.

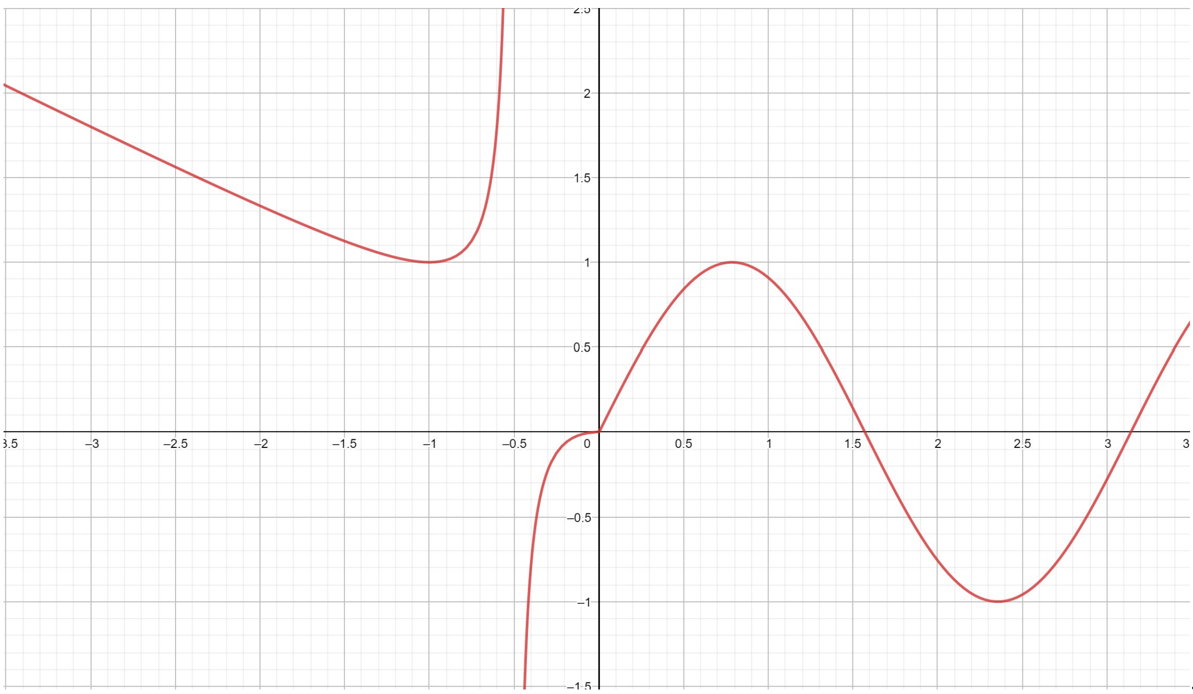
(2) Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -3 = -3$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\sin(2x)}{2x} = 2.$$

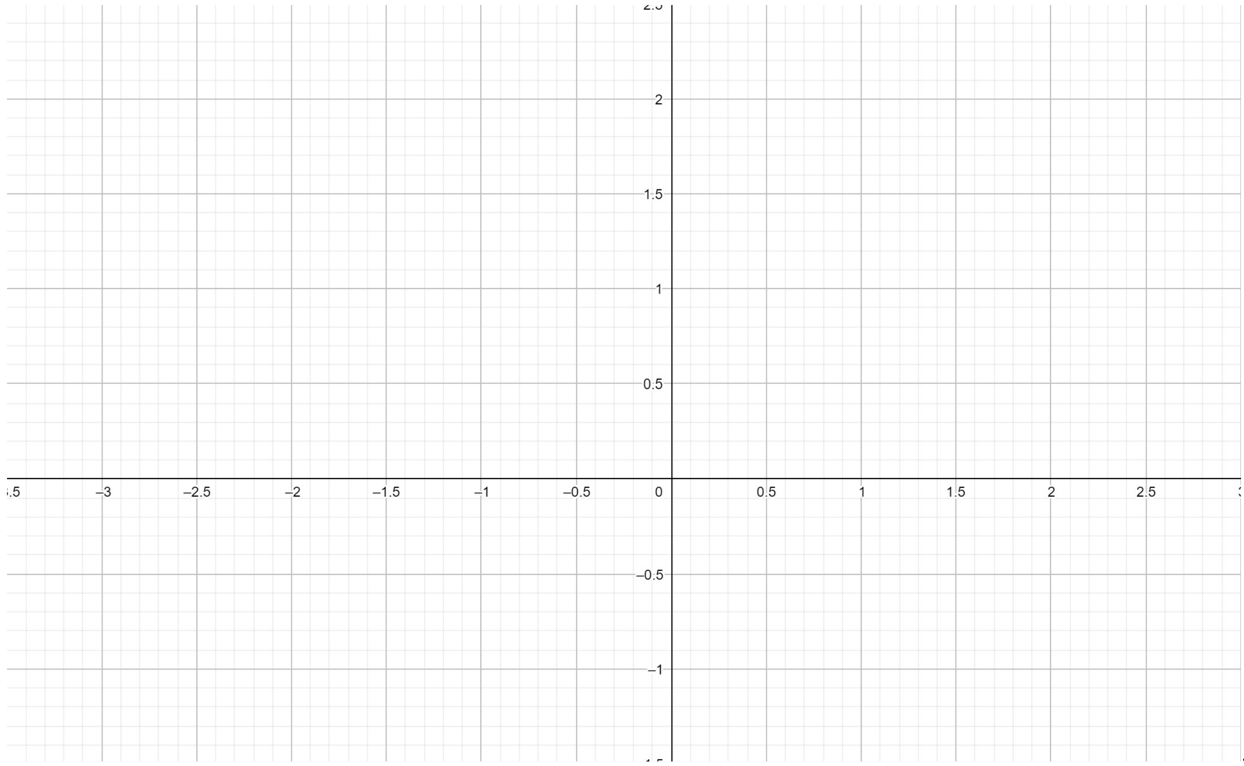
Quindi f è continua ma non derivabile in 0.

Esercizio 4 (5 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di funzione

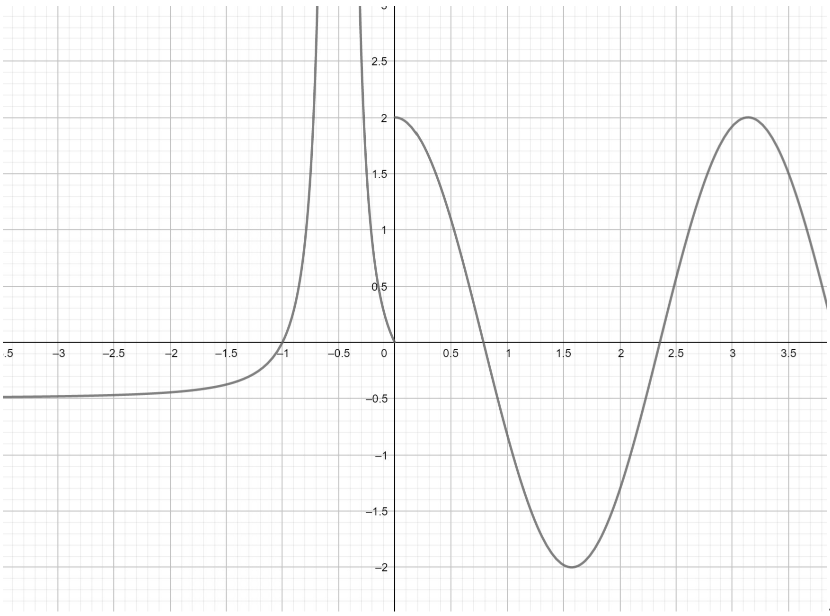


.

Disegnarne approssimativamente la sua derivata.



Soluzione:

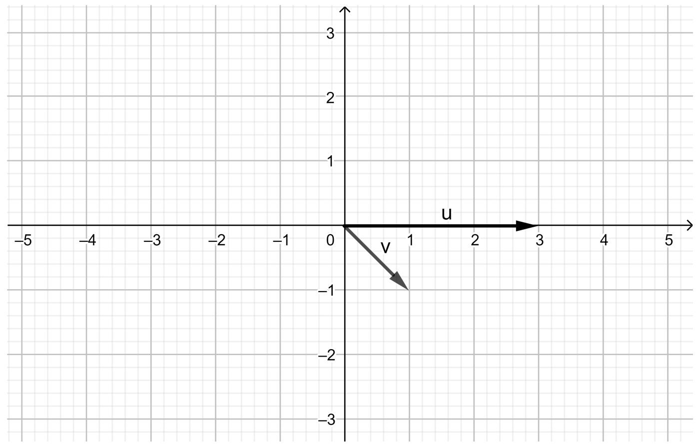


Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande.

(1) Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
calcolare $C = AB$.

(2) Trovare il <u>determinante</u> e il <u>rango</u> della seguente matrice, motivando la risposta.
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Disegnare il vettore $w = -u + 2v$.



Soluzione:

(1) La matrice $C = AB$ si calcola facendo il "prodotto riga per colonna", ed è

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Il determinante di D si calcola con il metodo di Laplace. Dati $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, denoto con d_{ij} l'elemento di D di riga i e colonna j, e denoto con D_{ij} la sottomatrice 3x3 di D ottenuta rimuovendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Dato che l'ultima riga ha molti zeri, trovo conveniente applicare il metodo di Laplace all'ultima riga (anche la prima colonna è una buona scelta). Ho

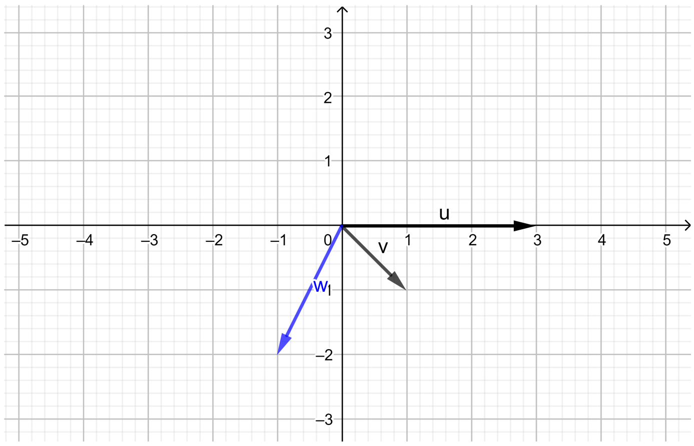
$$\begin{aligned} \det(D) &= -d_{41} \cdot \det(D_{41}) + d_{42} \cdot \det(D_{42}) - d_{43} \cdot \det(D_{43}) + d_{44} \cdot \det(D_{44}) \\ &= -0 \cdot \det(D_{41}) + 0 \cdot \det(D_{42}) - 0 \cdot \det(D_{43}) + 1 \cdot \det(D_{44}) \\ &= -0 + 0 - 0 + \det(D_{44}) \\ &= \det(D_{44}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 6) && \text{(per Sarrus)} \\ &= -6. \end{aligned}$$

In alternativa, avrei potuto applicare il metodo di Laplace alla prima colonna (per esempio) (stando attento ai segni alternanti):

$$\begin{aligned} \det(D) &= d_{11} \cdot \det(D_{11}) - d_{21} \cdot \det(D_{21}) + d_{31} \cdot \det(D_{31}) - d_{41} \cdot \det(D_{41}) \\ &= 0 \cdot \det(D_{11}) - 1 \cdot \det(D_{21}) + 0 \cdot \det(D_{31}) - 0 \cdot \det(D_{41}) \\ &= 0 - \det(D_{21}) + 0 - 0 \\ &= -\det(D_{21}) \\ &= -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(6 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0)) && \text{(per Sarrus)} \\ &= -6. \end{aligned}$$

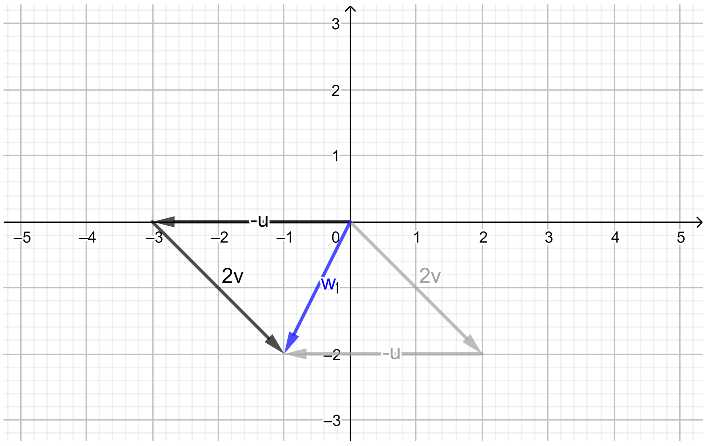
Poichè il determinante di D è diverso da 0, il rango di D è 4.

(3) La soluzione è la seguente



e si può ottenere per via grafica oppure per via algebrica.

Per via grafica: Si utilizza la regola del parallelogramma, invertendo il verso di u e moltiplicando per 2 la lunghezza di v:



Per via algebrica: Abbiamo $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Perciò

$$w = -u + 2v = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6 (5 punti)**.** Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette esattamente una soluzione. Inoltre, per tali valori, si scriva l'unica soluzione (in funzione di k).

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ kx + y = -1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema scritto in forma matriciale è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denotiamo con A la matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{b}$ il vettore dei termini noti

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e con $(A \mid \mathbf{b})$ la matrice completa

$$(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è $k^2 - 1$, che è uguale a 0 se e solo se $k = 1$ o $k = -1$. Il sistema ammette esattamente una soluzione se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq -1$: illustro questa affermazione procedendo per casi.

Caso "$k = 1$ o $k = -1$": In questo caso, $\det(A) = 0$ e perciò $\mathrm{rg}(A) < 3$. Perciò, il rango di A è diverso dal numero di incognite $(= 3)$, e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il numero di soluzioni del sistema non è 1 (bensì è 0 o infinito). (Per completezza, aggiungo che il numero di soluzioni è 0 per $k = 1$ e infinito per $k = -1$, ma in questo esercizio non era necessario stabilirlo.)

Caso "$k \neq 1$ e $k \neq -1$": In questo caso, $\det(A) \neq 0$, e quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$. Stabiliamo ora il rango di $(A \mid \mathbf{b})$: dato che A è una sottomatrice di $(A \mid \mathbf{b})$, il rango di $(A \mid \mathbf{b})$ è maggiore o uguale a $\mathrm{rg}(A)$; inoltre, è minore o uguale di 3 perché $(A \mid \mathbf{b})$ ha 3 righe. Concludiamo che il rango di $(A \mid \mathbf{b})$ è 3. Perciò $3 = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid \mathbf{b}) =$ numero di incognite. Perciò, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette esattamente una soluzione. La calcoliamo con il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k-1}{k^2-1} = \frac{-(k+1)}{(k-1)(k+1)} = -\frac{1}{k-1},$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{k+1}{k^2-1} = \frac{k+1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1},$$

$$z = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{k+1}{k^2-1} = \frac{k+1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1}.$$