Esercizi di applicazione del concetto di derivata

Serafina Lapenta

(1) Il volume di un cubo di lato x cm sta cambiando alla velocità di 1cm/s. A che velocità il cubo sta variando il suo volume nell'istante di tempo in cui $x = 5$cm?

(2) Due navi salpano dallo stesso porto alle 12. La nave A naviga verso nord con velocità $v_A = 50$km/h e la nave B naviga verso est con velocità $v_B = 45$km/h. Quanto velocemente cambia la distanza tra le due navi alle 13?

(3) Uno spettatore guarda una gara di remi dalla riva di un fiume. La barca al comando si trova a 20m dalla riva e si muove in linea retta, parallelamente alla riva, alla velocità di 30km/h. Quanto velocemente la barca di sta allontanando dallo spettatore?

(4) Una nave perde olio da un foro cilindrico che si allarga al passare del tempo. Il foro ha spessore di 1mm e il suo raggio cresce di 15 km al giorno. A che velocità la nave perde olio all'istante di tempo in cui $r = 5$mm?

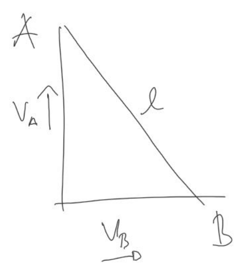
(5) Un quadrato sta variando la sua area con velocità di 2 cm al secondo. A che velocità cambia il suo lato? E a che velocità cambia la diagonale nell'istante in cui il lato è lungo 6cm?

Soluzioni

•

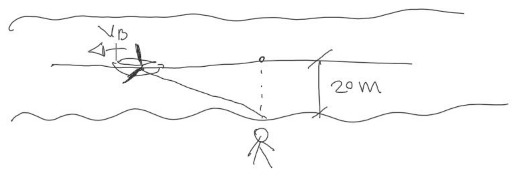
(1) Si ha che $V = x^3$ e $\dfrac{dx}{dt} = 1\text{cm/s}$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte,
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = 3x^2 \cdot 1.$$
Per $x = 5\text{cm}$ si ha
$$\frac{dV}{dt} = 75\text{cm}^2/\text{s}.$$

(2) Possiamo immaginare le due navi come lati di un triangolo rettangolo.



Per il teorema di Pitagora, $\ell^2 = x_A^2 + x_B^2$, dove x_A è la distanza tra A e il porto e x_B la distanza tra B e il porto. Dai dati del problema, ricaviamo che alle 13 (un'ora dopo esser salpate dal porto) $x_A = 50\text{km}$ e $x_B = 45\text{km}$. Inoltre, si ha
$$\frac{d\ell^2}{dt} = \frac{dx_A^2}{dt} + \frac{dx_B^2}{dt},$$
Se pensiamo a ℓ^2 come una funzione $f = f(\ell(t))$, e facciamo lo stesso per x_A e x_B si ha
$$\frac{d\ell^2}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} = \frac{dx_A^2}{x_A}\frac{dx_A}{dt} + \frac{dx_B^2}{dx_B}\frac{dx_B}{dt}$$
e di conseguenza
$$2\ell\frac{d\ell}{dt} = 2x_A\frac{dx_A}{dt} + 2x_B\frac{dx_B}{dt}$$
Alle 13, $\ell = \sqrt{45^2 + 50^2} \cong 67,27\text{km}$.
Allora,
$$2 \cdot 67,27\frac{d\ell}{dt} = 2 \cdot 50 \cdot 50 + 2 \cdot 45 \cdot 45$$
da cui ricaviamo $\dfrac{d\ell}{dt} = 67,27km/h$.

(3) Si risolve in maniera simile al precedente. Da notare che in questo caso solo uno dei due lati del triangolo sta aumentando.



(4) La quantità di olio persa è rappresentabile con un cilidro di volume $V = \pi r^2 s$, dove $s = 1mm = 10^{-6}km$. Mentre $\frac{dr}{dt} = 15\text{km/giorno}$. Quindi,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 2\pi rs \cdot 15$$

e valutato in $r = 5\text{mm}$ si ha

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot (5 \cdot 10^{-6}) \cdot (10^{-6}) \cdot 15$$

(5) Abbiamo $\frac{dA}{dt} = 2cm/s$ e $A = \ell^2$. Quindi

$$2 = \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} = 2\ell\frac{d\ell}{dt},$$

da cui $\frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{2\ell}2 = \frac{1}{\ell}$.
La diagonale del quadrato è $D = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{2}$. Di conseguenza

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{\ell},$$

che valutato in $\ell = 6$ dà $\frac{dD}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.