Applicazione dell'algebra lineare all geometria analitica

Serafina Lapenta

(1) Siano $r\colon 3x + y - 7 = 0$ e $s\colon 4x + 2y = 0$. Stabilire se le due rette sono incidenti.

(2) Sia k un parametro reale e siano $r\colon kx + \frac{9}{2}y + 2 = 0$ e $s\colon 2x + ky + 1 = 0$ due rette. Stabilire per quali valori di k le rette sono incidenti (in particolare perpendicolari), coincidenti e parallele.

(3) Sia $y = ax^2 + bx + c$ la generica equazione di una parabola. Usare il metodo di Cramer per trovare la parabola che passa per $A = (1, 1)$, $B = (2, 7)$ e $C = (3, 1)$.

(4) Sia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ la generica equazione di una circonferenza. Usare il metodo di Cramer per trovare la circonferenza che passa per $A = (1, 1)$, $B = (-2, 7)$ e $C = (4, 1)$.

(5) Dati la retta $r\colon 2x - y + 1 = 0$ e il punto $A = (5, 2)$, trovare
   (i) le equazioni parametriche di r;
   (ii) la retta per A parallela a r;
   (iii) la retta per B perpendicolare a r.

Cenni di svolgimento:

(1) Mettendo le due rette a sistema, trovo che il determinante della matrice associata al sistema lineare è non nullo. Essendo la soluzione del sistema unica, le rette sono incidenti.

(2) Considero il sistema costituito dalle equazioni di r e s. La matrice associata al sistema ha determinate pari a $k^2 - 9$, che si annulla per $k = +3, -3$. Quindi le rette sono incidenti per $k \neq \pm 3$. In particolare, le rette sono perpendicolari per $k = 0$.
Per $k = \pm 3$ il sistema è impossibile (il rango della matrice completa è 2 in entrambi i casi). Quindi per $k \pm 3$ le rette non si intersecano mai, cioè sono parallele.
Infine, le rette non sono mai coincidenti. Infatti, per esserlo, dovrebbero intersercarsi in "infiniti punti". Questo implicherebbe un sistema compatibile ma dipendente da un paramentro, e cioè il rango della matrice completa dovrebbe essere 1, cosa che non accade per nessun valore di k.

(3) Imponendo il passaggio della parabola nei 3 punti, troviamo un sistema di 3 equazioni e 3 incognite (a, b, c) che ha determinante non nullo. Lo risolvo con Cramer. Il sistema è

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

(4) Si risolve in maniera analoga al precedente, con sistema dato da $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ -2a + 7b + c = -53 \\ 4a + b + c = -17 \end{cases}$

(5) Esplicitando la y in funzione di x, le equazioni paramentriche sono $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$.
Il coefficiente angolare di r è $m = 2$, quindi la retta $y = mx + q$ passante per A e parallela a r si ottiene dal sistema $\begin{cases} m = 2 \\ 2 = m5 + q \end{cases}$ mentre la retta perpendicolare si ottiene da $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ 2 = m5 + q. \end{cases}$