

## Domini, complessi, principio di induzione, disequazioni, limiti, matrici

Serafina Lapenta

Questo file raccoglie esercizi tratti da diversi libri di testo e dispense online di vari docenti. Gli esercizi verranno svolti assieme durante le ore di tutorato.

(1) Principio di induzione:

(i) Per quali  $n$  si ha  $2^n < n^n$ ?

(ii) Dimostrare che  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  per ogni  $n \geq 1$ .

(iii) Dimostrare che  $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$  per ogni  $n \geq 1$ .

(iv) Dimostrare che un poligono convesso di  $n$  lati ( $n \geq 3$ ) ha  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$  diagonali.

(v) Dimostrare che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di  $n$  lati ( $n \geq 3$ ) è  $\pi(n-2)$ .

(vi) Dimostrare che  $3^n > n2^n$  per ogni  $n \geq 0$ .

(vii) Dimostrare che, per ogni  $n \geq 1$ ,  $d(n) = n^3 + 5n$  è divisibile per 6.

(viii) Dimostrare che, per ogni  $n \geq 1$ ,  $d(n) = 10^n - 1$  è divisibile per 9.

(ix) Dimostrare che  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}} \notin \mathbb{Q}$

(2) Numeri complessi:

(i) Individuare nel piano complesso i numeri:

$$1, \quad i, \quad 1 - i, \quad 3 - 2i, \quad (1 + i)^3, \quad i - 2, \quad \frac{i - 1}{i + 1}, \quad 0.$$

(ii) Mettere in forma trigonometrica i seguenti numeri:

$$5, \quad 1 + i, \quad 3 - 3i, \quad \sqrt{2}.$$

(iii) Calcolare la potenza quarta di tutti i numeri al punto precedente.

(iv) Calcolare le seguenti radici

$$\sqrt[3]{-1}, \quad \sqrt{i}, \quad \sqrt{2 - 2i}, \quad \sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}.$$

(v) Risolvere le seguenti equazioni in  $\mathbb{C}$ :

(a)  $z^2 + 3iz + 4 = 0$ ,

(b)  $z^2 + 2z + i = 0$ ,

(c)  $z|z| - 2z - 1 = 0$ , dove  $z = a + ib$  e  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

(3) Risolvere le seguenti disequazioni:

- (i)  $x - 2 \leq \sqrt{x^2 + 1}$ ,
- (ii)  $2 - |x| > \sqrt{3 + x}$ ,
- (iii)  $x \leq \sqrt{2x - x^2}$ ,
- (iv)  $x \geq \sqrt{2x - x^2}$ ,
- (v)  $\sqrt[3]{x + 2} \geq x - 1$ ,
- (vi)  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x} < \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$ ,
- (vii)  $|x^2 - 1| > 1$ ,
- (viii)  $|x - 1| \geq |x^2 - 1|$ ,
- (ix)  $\sin(4x) > \cos(2x)$ .

(4) Trovare i domini delle seguenti funzioni:

- (i)  $f(x) = \sqrt{\log(2 - x) - \log(x + 1)}$ ,
- (ii)  $f(x) = \log(2 - |x|) + \sqrt{1 - x^2}$  (oltre al dominio stabilire eventuali simmetrie e iniettività),
- (iii)  $f(x) = \arcsin(2x - \sqrt{x + 1})$ ,
- (iv)  $f(x) = (2x - 1)(x - |x - 1|)$ ,
- (v)  $f(x) = \log_3(2x - \sqrt{x^2 - 1})$ ,
- (vi)  $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$  (oltre al dominio stabilire eventuali simmetrie e iniettività),
- (vii)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2}}$ ,
- (viii)  $f(x) = \sqrt{\frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2}}$ ,
- (ix) Data  $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{x - 4}{5} \in \mathbb{Q}$ . Dimostrare che  $f$  è biettiva, stabilire chi è  $f^{-1}$  e calcolare  $f \circ f$ .

(5) Calcolare i seguenti limiti:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - n^3 + 1}{\sqrt{n} + n^2 - n^3}$ ,
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 1}{\sqrt{2n^2 - 1}}$ ,
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ ,
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\pi}{n}\right)^{2n}$ ,
- (v)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log n}{(n + 1)(n + 2)}$

(6) Esercizi sulle matrici (**solo per Ingegneria Chimica**, alcuni di questi argomenti non sono ancora stati svolti a lezione)

(i) Data  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Calcolare  $2A - B$  e  $3A + 2B - 4C$ ,
- (b) Risolvere l'equazione  $3X + 2(A - X) + B + 2(C + 2X) = 0$

(ii) Data  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , è vero che:

- (a)  $\det(A) = 0$ ,
- (b) non è possibile effettuare il prodotto  $AB$
- (c) non è possibile effettuare il prodotto  $BA$
- (d) il rango di  $A$  è uguale a quello di  $B$  ed è 2,
- (e)  $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dove possibile, calcolare il prodotto  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$  delle seguenti matrici:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (iv) Di tutte le matrici al punto precedente calcolare il rango e, dove possibile, il determinante e l'inversa. Fare lo stesso per il risultato dei prodotti.
- (v) Ridurre a gradini tutte le matrici dell' esercizio (iii). Fare lo stesso per i risultati dei prodotti.