Proprietà delle potenze

$$x^0 = 1 \qquad \forall x \neq 0 \qquad\qquad 1^\alpha = 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad\qquad x^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{x} \tag{2}$$

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad\qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \tag{3}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad\qquad a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^x \tag{4}$$

$$\text{Se } a > 1, x > y \quad a^x > a^y \qquad\qquad \text{Se } a < 1, x > y \quad a^x > a^y. \tag{5}$$

Proprietà dei logaritmi

$x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad\qquad \log_a(a^x) = x \tag{6}$$

$$\log_a(1) = 0 \qquad\qquad \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \tag{7}$$

$$\log_\alpha x^y = y \log_\alpha(x) \qquad\qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \text{ se } a \neq 1 \tag{8}$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} \tag{9}$$

Trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{10}$$

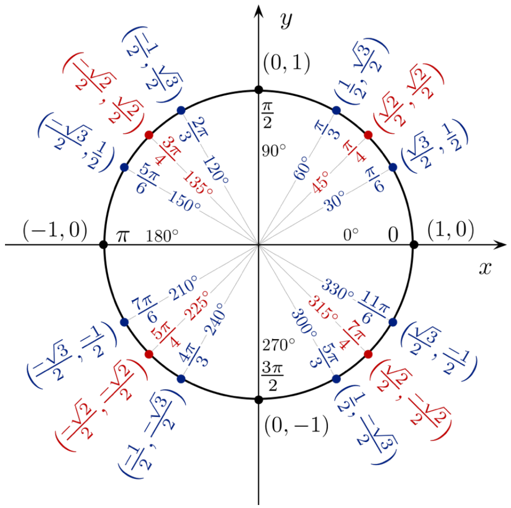
$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x \tag{11}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{12}$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x \tag{13}$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi + x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{14}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x) \tag{15}$$



Derivate

$$(f + g)' = f' + g' \qquad\qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{16}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad\qquad (f \circ g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{17}$$

$$(r') = 0 \quad (r \in \mathbb{R}) \qquad\qquad (x^r)' = r x^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R}) \tag{18}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{\log_a e}{x} \qquad\qquad (a^x)' = a^x \log_e(a) \tag{19}$$

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos x \qquad\qquad (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x) \tag{20}$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad\qquad (\operatorname{cotg}(x))' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{21}$$

$$(\operatorname{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad\qquad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{22}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad\qquad (\operatorname{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{23}$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x \quad \text{non esiste} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cos x \quad \text{non esiste} \tag{24}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \text{ se } a>1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \text{ se } a>1 \tag{25}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \text{ se } 0<a<1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \text{ se } 0<a<1 \tag{26}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ se } a>1 \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ se } a>1 \tag{27}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \text{ se } 0<a<1 \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ se } 0<a<1 \tag{28}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \tag{29}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1 \tag{30}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx} = \frac{m}{n} \tag{31}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{32}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log_e(a) \tag{33}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a>1) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a>1) \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

Geometria analitica

1. Equazione della retta:
   $y = ax + b$
2. Equazione del fascio di rette per il punto $P(x_0, y_0)$:
   $y - y_0 = m(x - x_0)$
3. Equazione della retta per due punti $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$:
   $\dfrac{y-y_P}{y_Q-y_P} = \dfrac{x-x_P}{x_Q-x_P}$
4. Date due rette $r : y = a_1x + b_1$ e $s : y = a_2x + b_2$:
   (a) condizione di parallelismo: $a_1 = a_2$
   (b) condizione di perpendicolarità: $a_1a_2 = -1$
5. Equazione della parabola:
   $y = ax^2 + bx + c$

Algebra lineare

1. Date le matrici $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,k} \end{pmatrix}$$

   (a) Se $C = (c_{i,j})$ è la matrice prodotto, il generico elemento è dato da $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j}$.
   (b) Se $n = m$, il determinante di A, $det(A)$, si ottiene da

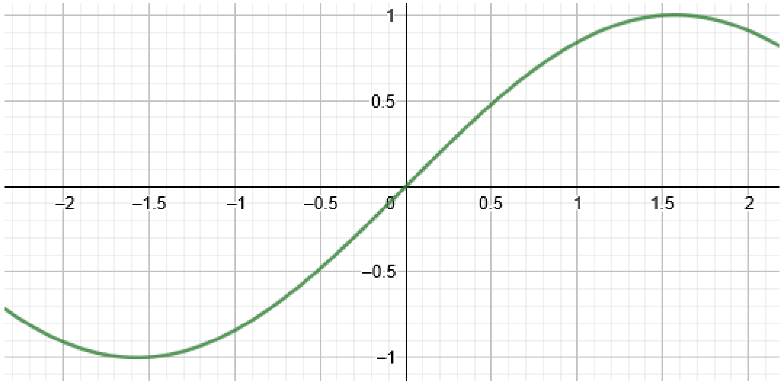
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

   dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j.
   (c) se $n = 2$,

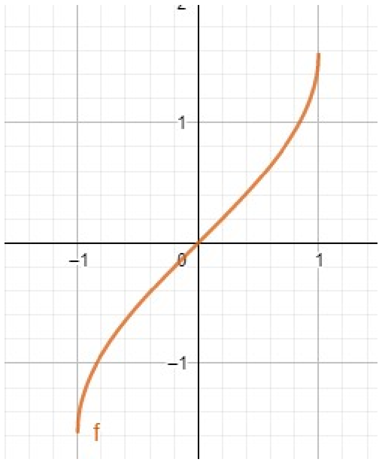
$$det\begin{pmatrix} \text{a} & \text{b} \\ \text{c} & \text{d} \end{pmatrix} = ad - bc.$$

   (d) Se $n = 3$ è possibile, in alternativa al punto (b), usare la regola di Sarrus.
   (e) Il rango di una matrice A è l'ordine massimo delle sottomatrici di A che hanno determinante non nullo.
2. Un insieme di vettori $v_1, \dots, v_k$ si dice linearmente dipendente se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli tali che $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_kv_k = 0$.
3. Il teorema di Rouchè-Capelli:
   Il sistema $AX = B$, con m incognite ed n equazioni, ammette soluzioni se la matrice dei soli coefficienti A e la matrice dei coefficienti e dei termini noti A_b (matrice completa) hanno lo stesso rango r. In tal caso il sistema ammette infinite ∞^{m-r} soluzioni. Se $m = r$ allora il sistema ammette un'unica soluzione. Se $r = n = m$ allora il sistema $AX = B$ ammette una unica soluzione data dalla regola di Cramer. Se $m = r < n$ allora la soluzione si trova eliminando opportunamente equazioni in eccesso e applicando la regola sopra. Se $r < m$ si considera un sottosistema con r incognite (avente matrice dei coefficienti con determinante non nullo) e si assegnano valori arbitrari alle altre $m - r$ incognite. Si risolve poi il sottosistema con la regola sopra.

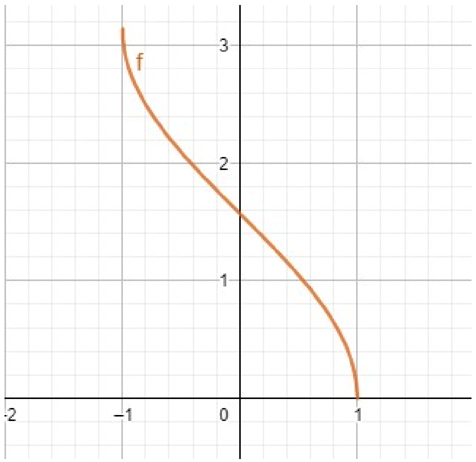
Grafici di funzioni elementari



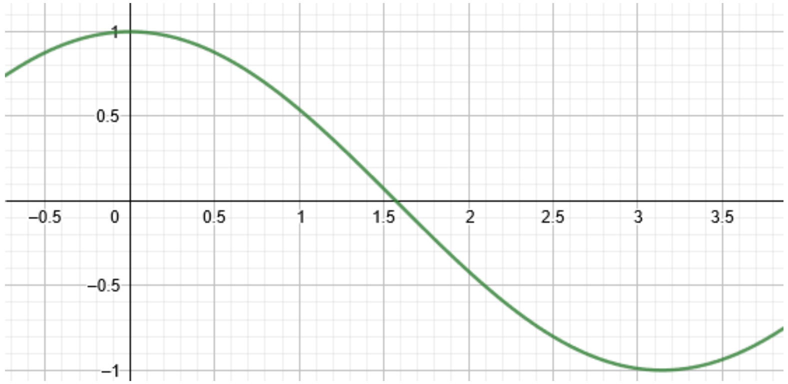
$f(x) = \sin(x)$



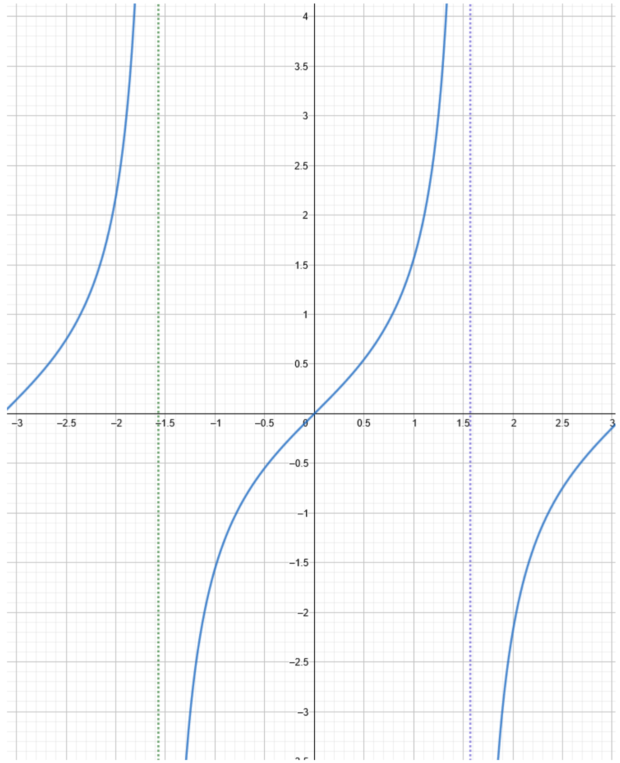
$f(x) = \arcsin(x)$



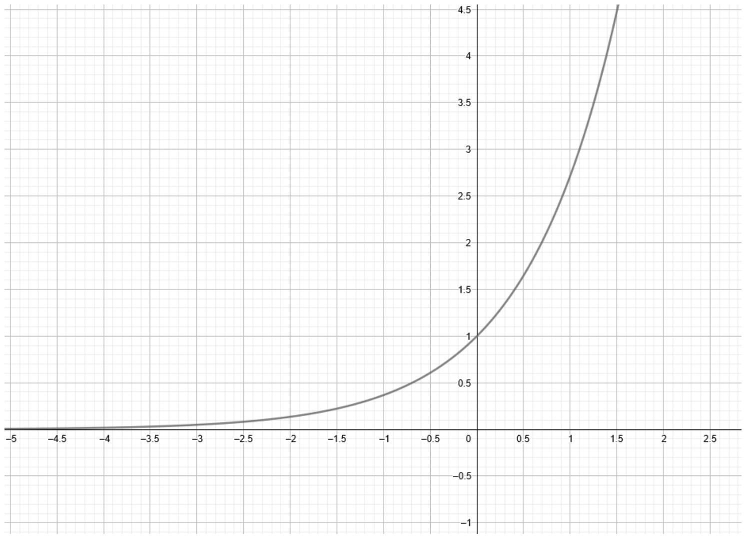
$f(x) = \arccos(x)$



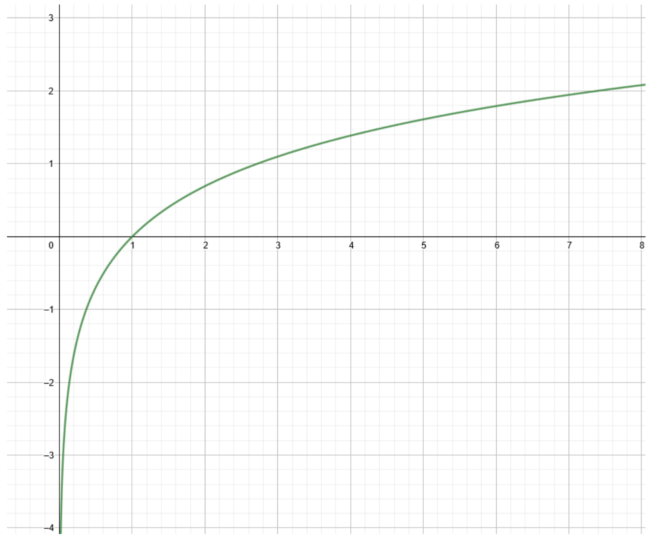
$f(x) = \cos(x)$



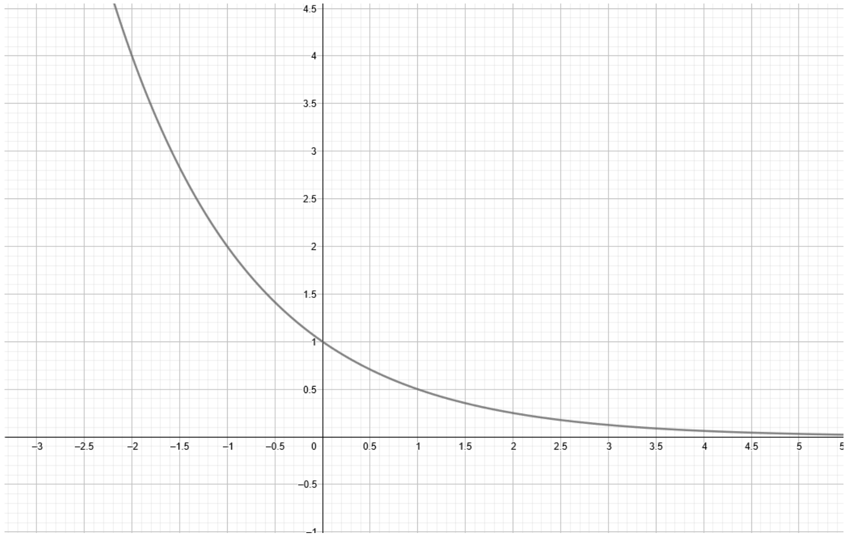
$f(x) = \tan(x)$



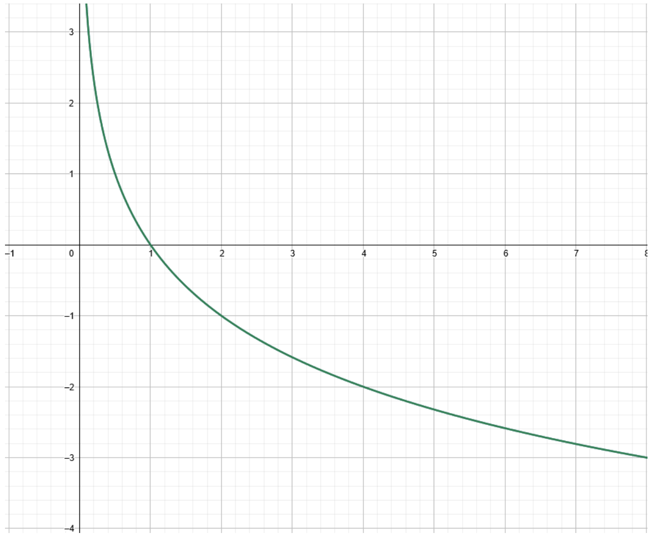
$f(x) = a^x$, con $a > 1$



$f(x) = \log_a(x)$, con $a > 1$



$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$



$f(x) = \log_a(x)$, con $0 < a < 1$