## Matematica di Base

$$x^0 = 1 \qquad \forall x \neq 0 \qquad\qquad 1^\alpha = 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad\qquad x^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{x} \tag{2}$$

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad\qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \tag{3}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad\qquad a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^x \tag{4}$$

$x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$

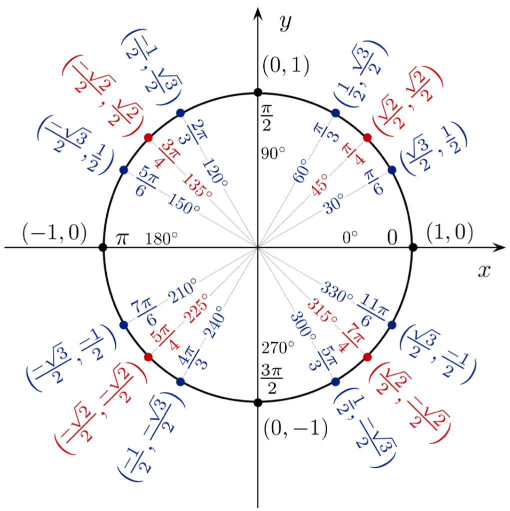
$$a^{\log_a(x)} = x \qquad\qquad \log_a(a^x) = x \tag{5}$$

$$\log_a(1) = 0 \qquad\qquad \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \tag{6}$$

$$\log_\alpha x^y = y \log_\alpha(x) \qquad\qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \text{ se } a \neq 1 \tag{7}$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} \tag{8}$$

1. Equazione del fascio di rette per il punto $P(x_0, y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. Equazione della retta per due punti $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$: $\dfrac{y - y_P}{y_Q - y_P} = \dfrac{x - x_P}{x_Q - x_P}$




## Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \tag{9}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1 \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx} = \frac{m}{n} \tag{11}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad\qquad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a(e) \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e(a) \tag{13}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \qquad\qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

## Derivate

$$(f + g)' = f' + g' \qquad\qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{16}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \qquad\qquad (f \circ g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{17}$$

$$(r') = 0 \quad (r \in \mathbb{R}) \qquad\qquad (x^r)' = r x^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R}) \tag{18}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{\log_a e}{x} \qquad\qquad (a^x)' = a^x \log_e(a) \tag{19}$$

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos x \qquad\qquad (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x) \tag{20}$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad\qquad (\operatorname{cotg}(x))' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{21}$$

$$(\operatorname{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad\qquad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{22}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad\qquad (\operatorname{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{23}$$

## Integrali

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \log(|x|) + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c \qquad \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c \qquad \int \operatorname{tg}(x) dx = \log|\cos(x)| + c$$

$$\int \operatorname{cotg}(x) dx = -\log|\cos(x)| + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx = -\operatorname{cotg}(x) + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + c \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int f^\alpha(x) f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \text{ se } \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(|f(x)|) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + c$$

$$\int f'(x) \sin(f(x)) dx = -\cos(f(x)) + c \qquad \int f'(x) \cos(f(x)) dx = \sin(f(x)) + c$$

## Equazioni differenziali

Data $ay'' + by' + c = p(x)e^{\lambda a} \sin(\mu x)$ oppure $ay'' + by' + c = p(x)e^{\lambda x} \cos(\mu x)$ la soluzione particolare $y_p$ è data da:

- Se $\lambda + \mu i$ è soluzione del polinomio caratteristico:
  $y_p = xq(x)e^{\lambda x}(\sin(\mu x) + \cos(\mu x))$,
  con $q(x)$ dello stesso grado di $p(x)$.

- Se $\lambda + \mu i$ non è soluzione del polinomio caratteristico:
  $y_p = q(x)e^{\lambda x}(\sin(\mu x) + \cos(\mu x))$,
  con $q(x)$ dello stesso grado di $p(x)$.

- Se $\mu = 0$ e $\lambda$ è soluzione doppia, $y_p = x^2 q(x)e^{\lambda x}$, con $q(x)$ dello stesso grado di $p(x)$-

## Algebra lineare

1. Date le matrici $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,k} \end{pmatrix}$$

   (a) Se $C = (c_{i,j})$ è la matrice prodotto, il generico elemento è dato da $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,m}b_{m,j}$.

   (b) Se $n = m$, il determinante di $A$, $det(A)$, si ottiene da

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

   dove $A_{ij}$ è la matrice che si ottiene da $A$ cancellando la riga $i$ e la colonna $j$.

   (c) se $n = 2$,

$$det \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} = ad - bc.$$

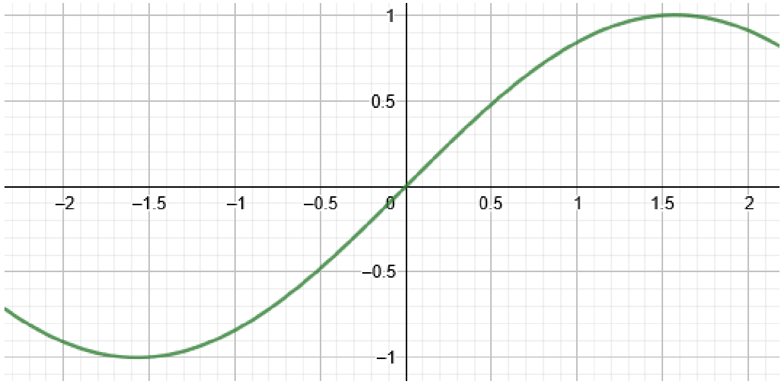
   (d) Se $n = 3$ è possibile, in alternativa al punto (b), usare la regola di Sarrus.

   (e) Il rango di una matrice $A$ è l'ordine massimo delle sottomatrici di $A$ che hanno determinante non nullo.

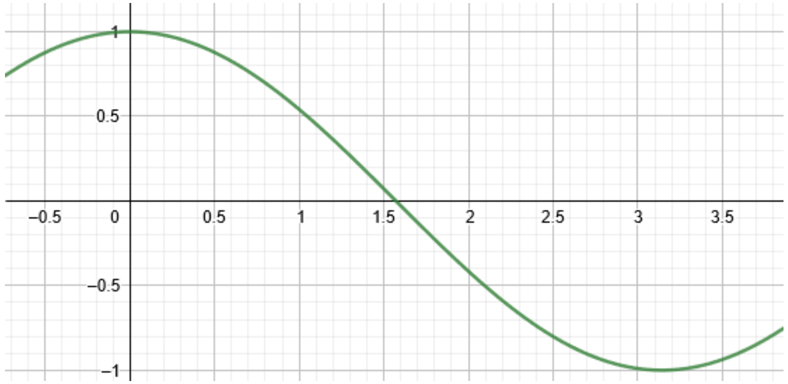
2. Un insieme di vettori $v_1, \dots, v_k$ si dice linearmente dipendente se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.

3. Il teorema di Rouchè-Capelli:
   Il sistema $AX = B$, con $m$ incognite ed $n$ equazioni, ammette soluzioni se la matrice dei soli coefficienti $A$ e la matrice dei coefficienti e dei termini noti $A_b$ (matrice completa) hanno lo stesso rango $r$. In tal caso il sistema ammette infinite $\infty^{m-r}$ soluzioni. Se $m = r$ allora il sistema ammette un'unica soluzione. Se $r = n = m$ allora il sistema $AX = B$ ammette una unica soluzione data dalla regola di Cramer. Se $m = r < n$ allora la soluzione si trova eliminando opportunamente equazioni in eccesso e applicando la regola sopra. Se $r < m$ si considera un sottosistema con $r$ incognite (avente matrice dei coefficienti con determinante non nullo) e si assegnano valori arbitrari alle altre $m - r$ incognite. Si risolve poi il sottosistema con la regola sopra.

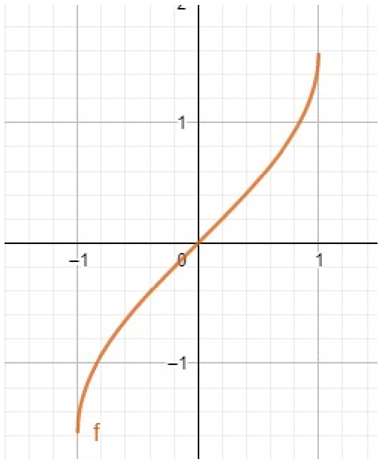
### Grafici di funzioni elementari



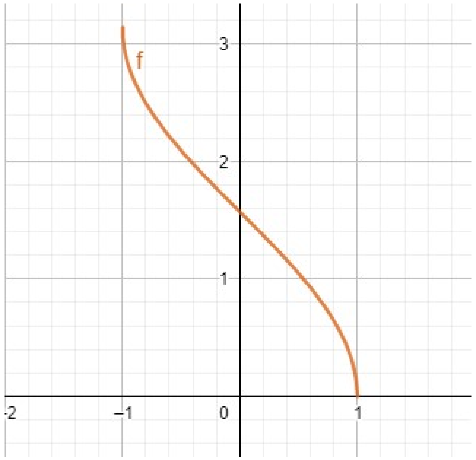

$f(x) = \sin(x)$



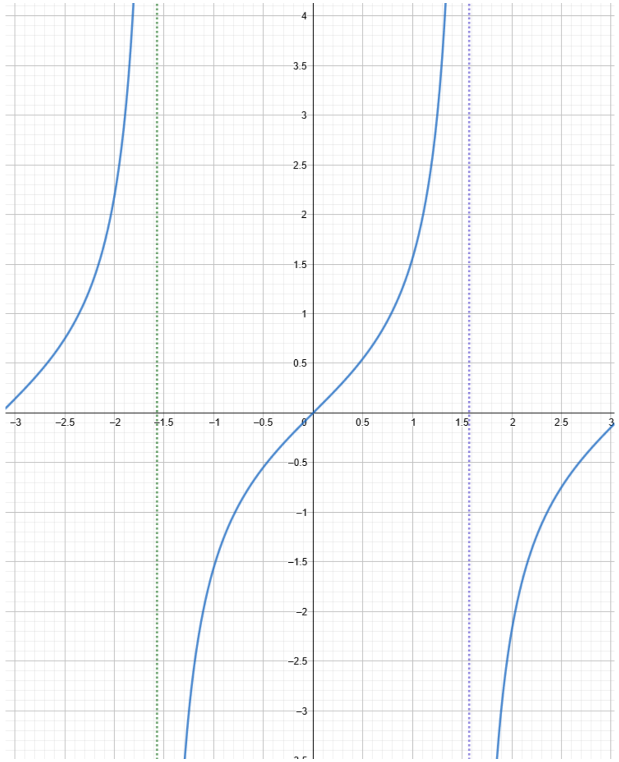

$f(x) = \cos(x)$



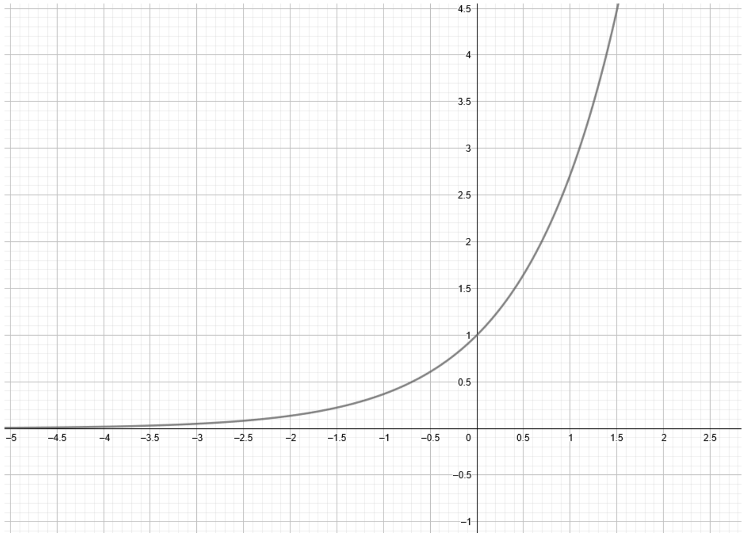

$f(x) = \arcsin(x)$



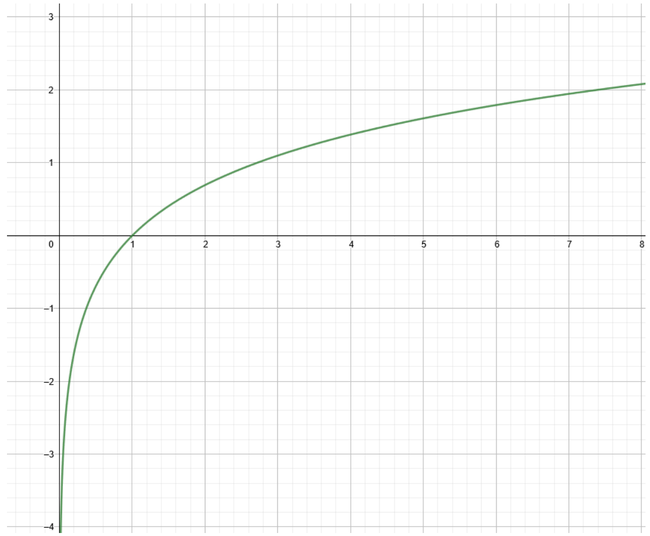

$f(x) = \arccos(x)$



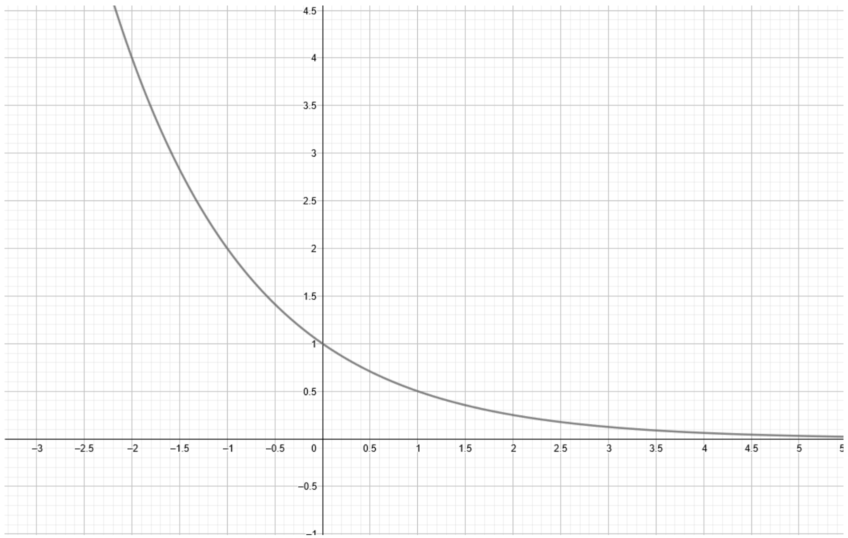
$f(x) = \tan(x)$



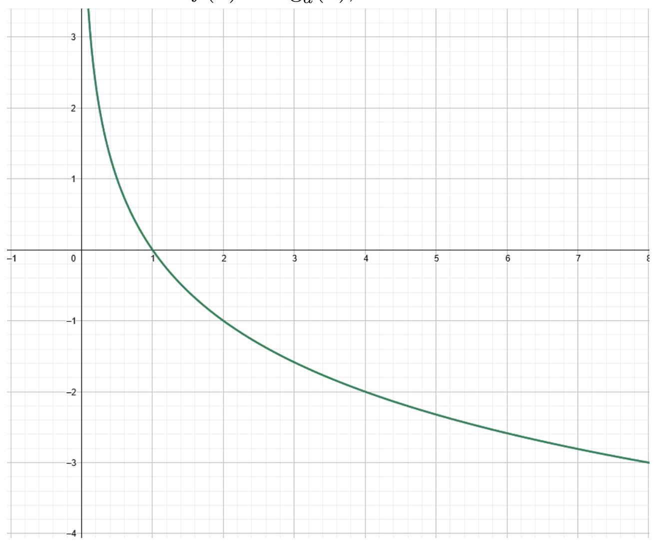
$f(x) = a^x$, con $a > 1$



$f(x) = \log_a(x)$, con $a > 1$



$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$



$f(x) = \log_a(x)$, con $0 < a < 1$